INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXX. BAND DRITTES HEFT 1961

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 27. März 1961

Postverlagsort Berlin *Preis DM 12,60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus,** Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30
Fernsprecher 2 79 01 / Fernschreib-Nr. 04 — 61 723

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01 / Fernschreib-Nr. 01 — 83 319

Inhalt:

Seite

Klumpp, M., Der dynamische Kardanfehler beim Vermessungskompaß. Mit 1 Abbildung 153

Günther, W., Analoge Systeme von Schalengleichungen. Mit 5 Abbildungen 160

Wedemeyer, E., Ausbildung eines Wirbelpaares an den Kanten einer Platte. Mit 16 Abbildungen 187

Isay, W. H., Zur Berechnung der Unterwassertragflügel bei wellenförmiger Anströmung. Mit 2 Abbildungen 201

Rüdiger, D., Ein neues Variationsprinzip in der Elastizitätstheorie. Mit 2 Abbildungen 220

INGENIEUR-ARCHIV

XXX. BAND | DRITTES HEFT | 1961

Der dynamische Kardanfehler beim Vermessungskompaß

Von **M. Klumpp**

1. Einleitung. Im Anschluß an verschiedene Untersuchungen von *Magnus* soll in der folgenden Arbeit die Auswirkung von Unwuchten in der Kreiselaufhängung beim Vermessungskreiselkompaß gezeigt werden.

Magnus[1, 2] hat u. a. Auswanderungserscheinungen an schwingenden, kardanisch gelagerten, kräftefreien Kreiseln nachgewiesen, die durch die Deviationsmomente der inneren Kardanringe hervorgerufen werden. Hier soll nun ein von *K. H. Stier*[3] beschriebener Vermessungskompaß untersucht werden, an dessen Anzeigegenauigkeit große Anforderungen gestellt werden. Ziel der Berechnungen ist, den mittleren azimutalen Anzeigefehler zu bestimmen und anzugeben, wie dieser von der Massenverteilung der Kreiselaufhängung abhängt.

Bei dem Vermessungskompaß besteht das nordweisende System aus einer schwimmenden Kugel, in der ein Rotor mit horizontaler, nordweisender Drehimpulsachse läuft. Der Schwerpunkt des Gesamtsystems Kugel samt Rotor liegt um die Metazenterhöhe h unter dem Auftriebsmittelpunkt. Da dieser Kompaß nur ortsfest (d. h. erdfest) verwendet wird, genügt ein Kreisel zur fehlerfreien Nordanzeige.

2. Voraussetzungen der Rechnung, Bezeichnungen. In Abb. 1 sind Rotor und Kugel schematisch dargestellt. Folgende Koordinatensysteme werden eingeführt:

1. Ein erdfestes (x, y, z)-System Σ_C, dessen Ursprung in den Schwerpunkt des Rotors gelegt wird, der mit dem Auftriebsmittelpunkt übereinstimmen soll. In der Ruhelage ($\alpha = \beta = \gamma = 0$)

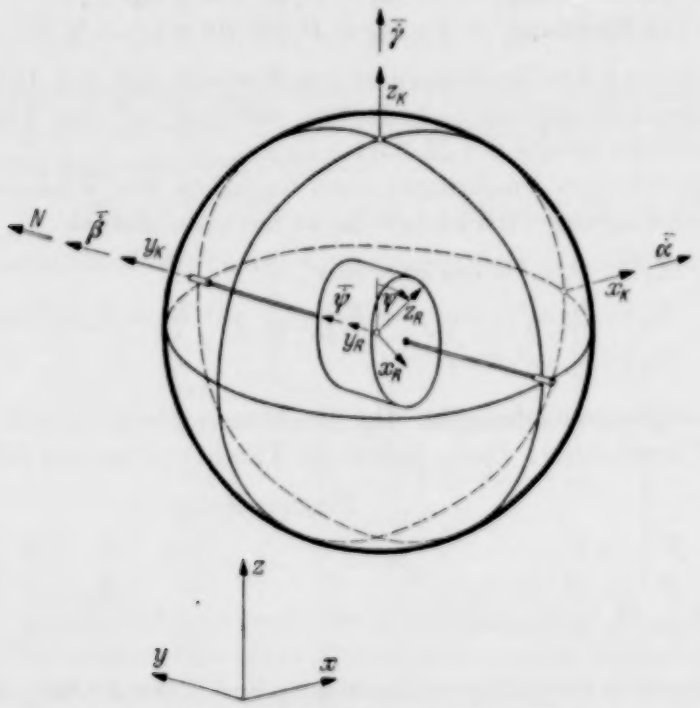

Abb. 1. Schema des Vermessungskompasses.

soll die y-Achse mit der nordweisenden Drehimpulsachse des Rotors zusammenfallen und die lotrechte z-Achse durch den Schwerpunkt des Gesamtsystems gehen.

[1] *K. Magnus*, Advances in Aeronautical Sciences, Vol. I, S. 507, London 1959.
[2] *K. Magnus*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) S. 23.
[3] *K. H. Stier*, Mitt. a. d. Markscheidewesen 60 (1953) Heft 1.

2. Ein kugelfestes (x_K, y_K, z_K)-System Σ_K, das für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ mit Σ_G übereinstimmt. In Σ_K hat der Schwerpunkt des Gesamtsystems also die Koordinaten $(0, 0, -h)$.

3. Ein rotorfestes (x_R, y_R, z_R)-System Σ_R, das für $\psi = 0$ mit Σ_K übereinstimmt.

Dabei sind α, β und γ die Winkel für die Drehungen der Kugel um die Achsen x_K, y_K und z_K, während sich der Rotor um die y_R-Achse relativ zu Σ_K um ψ dreht. In Abb. 1 sind die entsprechenden Drehvektoren eingetragen.

Die Winkel α, β, γ legen die Lage der Kugel im erdfesten System nicht eindeutig fest. Da aber die Winkel α und β schon aus konstruktiven Gründen sehr klein sind, werden einige Vereinfachungen möglich, die die Rechnung wesentlich erleichtern. Vor allem wird die azimutale Fehlanzeige als Mittelwert $(\bar{\gamma})$ der Ost-West-Schwingungen der Drehimpulsachse berechnet ohne Berücksichtigung von Kippung (β) und Elevation (α). Das stimmt mit der Ablesung überein, bei der die Rotorachse y_K und nicht deren Projektion in die Horizontalebene beobachtet wird.

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß sämtliche Bewegungen reibungsfrei erfolgen.

3. Ermittlung der äußeren Momente. Als äußere Momente wirken auf die Kreiselkugel das Schweremoment und das Führungsmoment infolge der Erddrehung.

Das Schweremoment entsteht durch die Schwerpunktverschiebung um die Metazenterhöhe h und ist nach Größe und Richtung abhängig von der Lage der Kugel (oder der Lage von Σ_K). In jedem Fall ist die Wirkungslinie des rückdrehenden Schweremomentes die Schnittgerade von (x, y)-Ebene und (x_K, y_K)-Ebene, da der Momentenvektor senkrecht auf der (z, z_K)-Ebene stehen muß.

Für kleine Winkel α und β — wenn also die trigonometrischen Funktionen bez. α und β linearisiert werden können — ergeben sich dann für das Schweremoment folgende Komponenten:

$$\begin{aligned} &\text{um die } x_K\text{-Achse} && M_\alpha \approx -Q\,\alpha\,, \\ &\text{um die } y_K\text{-Achse} && M_\beta \approx -Q\,\beta\,, \end{aligned}$$

mit $Q = G\,h$, wobei G das Gewicht von Rotor samt Kugel und h die Metazenterhöhe bedeuten.

Ausgehend von denselben Voraussetzungen läßt sich das Führungsmoment infolge der Erddrehung, das auf den Kreisel wirkt, einfach ermitteln. Seine Komponenten sind bekannt[1]. Sie betragen

$$\begin{aligned} &\text{in Richtung } -\dot{\alpha}\text{:} && K_1 = D_e\,\omega^*\,\alpha\cos\varphi\cos\gamma\,, \\ &\text{in Richtung } -\dot{\gamma}\text{:} && K_2 = D_e\,\omega^*\cos\varphi\sin\gamma\,, \\ &\text{in Richtung } +\dot{\alpha}\text{:} && K_3 = D_e\,\omega^*\sin\varphi\,, \end{aligned}$$

wobei $D_e = B_R\,\omega$ den Betrag des Drehimpulses des Kreisels mit der Drehmasse B_R um die y_K-Achse und der Winkelgeschwindigkeit ω bedeuten, während ω^* die Winkelgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite des Meßortes sind.

Werden die trigonometrischen Funktionen noch bezüglich des Winkels γ linearisiert (auch die Amplitude der Azimutschwingung wird klein sein) so hat man einfach

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= D_e\,\omega^*\,\alpha\cos\varphi = K\,\alpha\,, \\ K_2 &= D_e\,\omega^*\,\gamma\cos\varphi = K\,\gamma\,, \\ K_3 &= D_e\,\omega^*\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{ mit } K = D_e\,\omega^*\cos\varphi\,.$$

4. Aufstellen der Bewegungsgleichungen. Die Drehmassen werden mit A, B und C, die Kippmassen mit D, E und F bezeichnet. Dann haben die Trägheitstensoren folgende Gestalt:

für die Kugel

$$\begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix} \equiv \Theta_K\,,$$

für den Rotor

$$\begin{vmatrix} A_R & 0 & 0 \\ 0 & B_R & 0 \\ 0 & 0 & A_R \end{vmatrix} \equiv \Theta_R\,.$$

Wegen der außerordentlich sorgfältigen Gestaltung und Auswuchtung der Rotoren für Kreiselkompasse soll hier mit einem symmetrischen Rotor und verschwindenden Kippmassen gerechnet werden. Außerdem ist die Hauptmasse des Rotors elastisch mit der Welle verbunden, wodurch sie sich bei überkritischem Lauf so einstellt, daß die Drehung um eine Hauptachse erfolgt.

Der Drehvektor $\mathfrak{u}$ der Kugel hat voraussetzungsgemäß die Komponenten

$$\mathfrak{u} = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})\,, \tag{1}$$

[1] Vgl. z. B. *R. Grammel*, Der Kreisel, 2. Aufl. Bd. 2, S. 94, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

der des Rotors ergibt sich einfach zu

$$\mathfrak{u}_R = T_{RK}\,\mathfrak{u} + \dot{\psi} \tag{2}$$

wobei T_{RK} die Matrix der Koordinatentransformation von Σ_R nach Σ_K ist. In Komponenten geschrieben hat man

$$\left.\begin{aligned} u_{xR} &= \dot{\alpha}\cos\psi - \dot{\gamma}\sin\psi\,,\\ u_{yR} &= \dot{\beta} + \dot{\psi}\,,\\ u_{zR} &= \dot{\alpha}\sin\psi + \dot{\gamma}\cos\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Die Drehbeschleunigungen sind dann

$$\dot{u}_x = \ddot{\alpha}\,,\quad \dot{u}_y = \ddot{\beta}\,,\quad \dot{u}_z = \ddot{\gamma}\,, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_{xR} &= \ddot{\alpha}\cos\psi - \dot{\alpha}\,\dot{\psi}\sin\psi - \ddot{\gamma}\sin\psi - \dot{\gamma}\,\dot{\psi}\cos\psi\,,\\ \dot{u}_{yR} &= \ddot{\beta} + \ddot{\psi}\,,\\ \dot{u}_{zR} &= \ddot{\alpha}\sin\psi + \dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\psi + \ddot{\gamma}\cos\psi - \dot{\gamma}\,\dot{\psi}\sin\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Bewegungsgleichungen werden über die Komponentendarstellung der Eulergleichung aufgestellt, die mit dem Drehimpulsvektor $\mathfrak{d}$, dem Drehvektor $\mathfrak{u}$ und dem Momentenvektor $\mathfrak{M}$ lautet

$$\frac{d'\mathfrak{d}}{dt} - \mathfrak{d}\times\mathfrak{u} = \mathfrak{M}\,,$$

wobei $\frac{d'\mathfrak{d}}{dt}$ die zeitliche Ableitung im körperfesten System bedeutet. In Komponenten geschrieben erhält man
für den Rotor

$$\left.\begin{aligned} A_R\,\dot{u}_{xR} - (B_R - A_R)\,u_{yR}\,u_{zR} &= M_{xR}\,,\\ B_R\,\dot{u}_{yR} &= M_{yR}\,,\\ A_R\,\dot{u}_{zR} - (A_R - B_R)\,u_{xR}\,u_{yR} &= M_{zR}\,; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

für die Kugel

$$\left.\begin{aligned} A\,\ddot{\alpha} - F\,\ddot{\beta} - E\,\ddot{\gamma} - (B-C)\,\dot{\beta}\,\dot{\gamma} + \dot{\gamma}\,(F\dot{\alpha} + D\dot{\gamma}) - \dot{\beta}\,(E\dot{\alpha} + D\dot{\beta}) &= M_x\,,\\ -F\,\ddot{\alpha} + B\,\ddot{\beta} - D\,\ddot{\gamma} - (C-A)\,\dot{\alpha}\,\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\,(E\dot{\alpha} + D\dot{\beta}) - \dot{\gamma}\,(F\dot{\beta} + E\dot{\gamma}) &= M_y\,,\\ -E\,\ddot{\alpha} - D\,\ddot{\beta} + C\,\ddot{\gamma} - (A-B)\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta} + \dot{\beta}\,(F\dot{\beta} + E\dot{\gamma}) - \dot{\alpha}\,(F\dot{\alpha} + D\dot{\gamma}) &= M_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Neben den berechneten äußeren Momenten sind in diese Gleichungen die inneren Momente zwischen Rotor und Kugel einzusetzen. Ist $\mathfrak{M}'$ das Moment, das der Rotor auf die Kugel ausübt, gemessen in Σ_K, so gelten folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{M}_R = T_{RK}\,\mathfrak{M}' \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{M} = -\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}_a\,,$$

wo $\mathfrak{M}_a$ die äußeren Momente sind, die an der Kugel angreifend gedacht werden. Im einzelnen ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} M_{xR} &= M'_x\cos\psi - M'_z\sin\psi\,,\\ M_{yR} &= M'_y\,,\\ M_{zR} &= M'_x\sin\psi + M'_z\cos\psi\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -M'_x - Q\,\alpha + K_3 - K_1\,,\\ M_y &= -M'_y - Q\,\beta\,,\\ M_z &= -M'_z - K_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Für die weitere Rechnung ist es sinnvoll, das Antriebsmoment M_{yR} des Rotors gleich Null zu setzen, da es während der kurzen Zeit einer Periode der hier zu betrachtenden schnellen Schwingungen ohne Bedeutung ist[1]. Mit (2') und (5) gilt somit

$$\ddot{\beta} + \ddot{\psi} = 0$$

oder

$$\dot{\beta} + \dot{\psi} = \text{konst.} = \omega \tag{9}$$

und mit (8)

$$M_y = -Q\,\beta\,. \tag{10}$$

[1] Siehe z. B. Fußnote 2 von Seite 153.

Außerdem lassen sich durch Kombination der Gleichungen (7) und (8) zwei Beziehungen finden:

$$M_x = -M_{xR}\sin\psi - M_{xR}\cos\psi - Q\,\alpha + K_3 - K_1\,, \tag{11}$$

$$M_z = M_{xR}\sin\psi - M_{zR}\cos\psi - K_2\,. \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (1) bis (9) erhält man aus (10) bis (12) die Bewegungsgleichungen

$$B\ddot{\beta} - F\ddot{\alpha} - D\ddot{\gamma} + Q\beta = f\dot{\alpha}\dot{\gamma} + E\dot{\gamma}^2 + F\dot{\gamma}\dot{\beta} - D\dot{\alpha}\dot{\beta} - E\dot{\alpha}^2\,, \tag{13}$$

$$a\ddot{\alpha} - F\ddot{\beta} - E\ddot{\gamma} - b\dot{\gamma} + (Q+K)\alpha - K_3 = -d\dot{\beta}\dot{\gamma} + E\dot{\alpha}\dot{\beta} - F\dot{\alpha}\dot{\beta} + D\dot{\beta}^2 - D\dot{\gamma}^2\,, \tag{14}$$

$$c\ddot{\gamma} - D\ddot{\beta} - E\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + K\gamma = e\dot{\alpha}\dot{\beta} + F\dot{\alpha}^2 - F\dot{\beta}^2 + D\dot{\alpha}\dot{\gamma} - E\dot{\beta}\dot{\gamma}\,, \tag{15}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a &= A + A_R\,,\\ b &= B_R\,\omega\,,\\ c &= C + A_R\,,\\ d &= C - B + A_R\,,\\ e &= A_R + A - B\,,\\ f &= C - A\,. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (14) kann sofort die „stationäre Elevation" berechnet werden. Sie beträgt

$$\alpha_0 = \frac{K_3}{Q+K}\,.$$

Wenn weiterhin unter α die Schwingungsausschläge um die Nullage α_0 verstanden werden, kann K_3 in (14) gestrichen werden.

5. Lösung der Bewegungsgleichungen. Die linearen Glieder der Differentialgleichungen (13) bis (15) stehen auf ihren linken Seiten. Bei einer Linearisierung bezüglich der Variablen α, β und γ sind also die rechten Seiten gleich Null zu setzen. Die Lösung des verbliebenen linearen Teils kann als erste Näherung aufgefaßt werden. Diese erste Näherung ist von der Form

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_A \sin(n\,t)\,,\\ \alpha_1 &= \alpha_A \sin(n\,t+\varepsilon)\,,\\ \beta_1 &= \beta_A \sin(n\,t+\varphi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Das Ziel der Untersuchungen ist, durch Bildung eines Mittelwertes für die rechten Seiten der Differentialgleichungen (14) und (15) über eine Periode der Näherungslösung (16) den Einfluß der nichtlinearen Glieder abzuschätzen um so die azimutale Fehlanzeige und die „dynamische Elevation" zu ermitteln.

Die Frequenz n in (16) kann aus der charakteristischen Gleichung des linearisierten Systems (13), (14), (15) bestimmt werden, die die Gestalt hat

$$\begin{aligned} &\lambda^6\,[B\,a\,c - F^2\,c - 2\,D\,E\,F - B\,E^2 - a\,D^2] +\\ &\lambda^4\,[b^2\,B + Q\,(a\,c - E^2) + (Q+K)\,(c\,B - D^2) + K\,(a\,B - F^2)] +\\ &\lambda^2\,[(Q+K)\,(K\,B + Q\,c) + Q\,(b^2 + a\,K)] + Q\,(Q+K)\,K = 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Diese Gleichung dritten Grades in λ^2 läßt sich allgemein nicht explizit lösen, auch dann nicht, wenn durch vernünftige Größenbetrachtungen einige Vereinfachungen vorgenommen werden. Natürlich kann (17) numerisch mit beliebiger Genauigkeit ausgewertet werden, doch lassen sich auf anderem Wege übersichtlichere Näherungslösungen finden. Die charakteristische Gleichung (17) wird lösbar, wenn der Kugel entweder ein Freiheitsgrad genommen wird, also z. B. $\beta = \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$ gesetzt wird, oder wenn die äußeren Momente verschwinden. Dabei genügt es schon, entweder $Q = 0$ oder $K = 0$ anzunehmen.

Die geringste Änderung dürfte eintreten, wenn der Kugel der Freiheitsgrad um die y_K-Achse genommen wird ($\beta = \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$), da Winkeländerungen $\dot{\alpha}$ und $\dot{\gamma}$ keine Kreiselmomente um die y_K-Achse hervorrufen. Unter dieser Voraussetzung erhält man als Frequenzen aus der charakteristischen Gleichung

$$n_{1,2} = \sqrt{\frac{b^2 + a\,K + (Q+K)\,c \pm \sqrt{[b^2 + a\,K + (Q+K)\,c]^2 - 4\,(Q+K)\,(a\,c - E^2)}}{2\,(a\,c - E^2)}}\,. \tag{18}$$

Da gegenüber b^2 alle anderen Glieder klein sind und sicher $E^2 \ll a\,c$ ist, ergibt sich die Näherungsfrequenz der schnellen Nutationsschwingung, die für das hier interessierende Ergebnis vor allem wichtig ist, zu

$$n \approx \frac{b}{\sqrt{a\,c}}\,. \tag{19}$$

Das ist die bekannte Näherungsformel für die Nutation eines schnellen Kreisels.

Werden die äußeren Momente gleich Null gesetzt ($Q = K = 0$), so läßt sich die schnelle Nutationsfrequenz durch vernünftige Vernachlässigungen ebenfalls auf (19) zurückführen. Durch dieses Ergebnis wird plausibel gemacht, daß die aus (17) folgende Frequenz nicht viel von der Näherungslösung (19) abweichen wird.

Wird unter der vereinfachenden Voraussetzung ($Q = K = 0$) der Einfluß der nichtlinearen rechten Seiten von (14) und (15) auf die Lösung dieser Gleichungen abgeschätzt, so ergeben sich die schon von *Magnus* berechneten mittleren Auswanderungsgeschwindigkeiten der Kreiselachse. Erst die äußeren Momente begrenzen die Auswanderungen und geben Gleichgewichtslagen, aus deren Verschiebung die gesuchten Fehlanzeigen ermittelt werden.

Zur Bestimmung von Phasenwinkel und Amplitudenverhältnis für die Lösung der linearen Teile von (13) bis (15) wird der Lösungsansatz (16) besser etwas anders geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_A \sin(n\,t)\,, \\ \alpha_1 &= M \sin(n\,t) + N \cos(n\,t)\,, \\ \beta_1 &= S \sin(n\,t) + T \cos(n\,t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dabei wird der Zusammenhang mit (16) durch folgende Beziehungen hergestellt:

$$\frac{N}{M} = \operatorname{tg}\varepsilon\,, \qquad \frac{T}{S} = \operatorname{tg}\varphi\,, \qquad \sqrt{N^2 + M^2} = \alpha_A\,, \qquad \sqrt{T^2 + S^2} = \beta_A\,.$$

Geht man mit (20) in die linken Seiten von (13) bis (15) ein, so erhält man Gleichungen, die die gesuchten Größen zu berechnen gestatten. Man findet

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{b}{n\left(\dfrac{F\,D\,n^2}{B\,n^2 - Q} + E\right)}\,, \tag{21}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b\,n}{E\,n^2 + \dfrac{D}{F}\,[a\,n^2 - (Q + K)]}\,, \tag{22}$$

$$\frac{\alpha_A^2}{\gamma_A^2} = \frac{b^2\,n^2 + n^4\left(E + \dfrac{F\,D\,n^2}{B\,n^2 - Q}\right)^2}{\left[(Q + K) + n^2\left(\dfrac{F^2\,n^2}{B\,n^2 - Q} - a\right)\right]^2}\,, \tag{23}$$

$$\frac{\beta_A^2}{\gamma_A^2} = \frac{b^2\,n^2 + \left\{E\,n^2 + \dfrac{D}{F}\,[a\,n^2 - (Q + K)]\right\}^2}{\left\{F\,n^2 + \dfrac{[(Q + K) - a\,n^2]\,(B\,n^2 - Q)}{F\,n^2}\right\}^2}\,. \tag{24}$$

Diese Ausdrücke müssen ebenso wie (17) der Zahlenrechnung zugrundegelegt werden.

Die gesuchten Fehlanzeigen ergeben sich als Einflüsse der nichtlinearen Glieder der rechten Seiten in den Differentialgleichungen (14) und (15):

$$R_\alpha = -\,d\,\dot\beta\,\dot\gamma + E\,\dot\alpha\,\dot\beta - F\,\dot\alpha\,\dot\gamma + D\,\dot\beta^2 + D\,\dot\gamma^2\,,$$
$$R_\gamma = e\,\dot\alpha\,\dot\beta + D\,\dot\alpha\,\dot\gamma - E\,\dot\beta\,\dot\gamma + F\,\dot\alpha^2 - F\,\dot\beta^2\,.$$

Mit der Näherungslösung (16) werden nun die über eine Periode genommenen Mittelwerte gebildet

$$\overline{R}_\alpha = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} R_\alpha(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,d(n\,t)\,,$$

$$\overline{R}_\gamma = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} R_\gamma(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,d(n\,t)\,,$$

womit sich dann die Mittellagen der Schwingungen näherungsweise bestimmen lassen:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{Q+K}\bar{R}_\alpha\,, \qquad \bar{\gamma} = \frac{1}{K}\bar{R}_\gamma\,.$$

Man berechnet die folgenden Ausdrücke:

$$\bar{\alpha} = \frac{n^2\gamma_A^2}{2\,(Q+K)}\left[-d\frac{\beta_A}{\gamma_A}\cos\varphi + E\frac{\alpha_A\beta_A}{\gamma_A^2}(\cos\varepsilon\cos\varphi + \sin\varepsilon\sin\varphi) - F\frac{\alpha_A}{\gamma_A}\cos\varepsilon + D\frac{\beta_A^2}{\gamma_A^2} - D\right], \tag{25}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{n^2\alpha_A^2}{2\,K}\left[e\frac{\beta_A}{\alpha_A}(\cos\varepsilon\cos\varphi + \sin\varepsilon\sin\varphi) + D\frac{\gamma_A}{\alpha_A}\cos\varepsilon - E\frac{\beta_A\gamma_A}{\alpha_A^2}\cos\varphi + F - F\frac{\beta_A^2}{\alpha_A^2}\right]. \tag{26}$$

Hier sieht man am besten die Bedeutung der schnellen Nutationsschwingungen für die Fehlanzeige, da sowohl $\bar{\alpha}$ wie $\bar{\gamma}$ den Faktor n^2 haben. Diese Abhängigkeit wird auch nicht aufgehoben durch die Gleichungen (21) bis (24), die ja ebenfalls von n abhängig sind.

6. Auswertung der Ergebnisse. Eine kurze numerische Auswertung soll nun Auskunft über die praktische Bedeutung der Anzeigefehler geben und helfen, mittels nachgeprüfter Vernachlässigungen einfache Endergebnisse zu formulieren. Ihr werden die folgenden Werte zugrundegelegt, die entweder vom Institut für Markscheidewesen in Clausthal zur Verfügung gestellt wurden, oder aber auf Schätzungen beruhen, die nach Möglichkeit abgesichert sind:

$$\begin{aligned} A_R &= 34\ \text{kg cm}^2\,, & A &= 240\ \text{kg cm}^2\,,\\ B_R &= 43\ \text{kg cm}^2\,, & B &= 280\ \text{kg cm}^2\,,\\ \omega &= 2030\ \text{s}^{-1}\,, & C &= 300\ \text{kg cm}^2\,,\\ G &= 8{,}34\,10^3\ \text{kg cm s}^{-2}\,, & \omega^* &= 7{,}29\,10^{-5}\ \text{s}^{-1}\,.\\ h &= 3{,}5\ \text{cm}\,, \end{aligned}$$

Die Kippmassen werden vorerst willkürlich mit $D = E = F = 10\ \text{kg cm}^2$ angenommen, was etwa 3% von C entspricht. Diese Werte gelten für die Bestimmung der Nutationsfrequenz und für weitere Abschätzungen. Es wird sich zeigen, daß die geforderte Anzeigegenauigkeit des Kompasses eine Beschränkung der Kippmasse F verlangt.

Die schnelle Nutationsfrequenz ergibt sich aus (17) zu $n = 288\ \text{s}^{-1}$, während die Näherungsformel (19) $n \approx 289\ \text{s}^{-1}$ ergibt. Gleichung (19) ist also genau genug, was auch aus (17) direkt erkannt werden kann.

Werden nun die Ergebnisse (21) bis (24) der exakten Lösung der linearisierten Differentialgleichungen (13) bis (15) weiter untersucht, so ergeben sich folgende Abschätzungen, die eine für praktisch vorkommende Fälle ausreichende Genauigkeit haben dürften:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -\frac{b}{n\,E} = -\frac{\sqrt{a\,c}}{E} \gg 1\,, \tag{21'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{F}{D}\sqrt{\frac{c}{a}}\,, \tag{22'}$$

$$\frac{\alpha_A^2}{\gamma_A^2} = \frac{b^2}{a\,n^2}\,, \quad \frac{\alpha_A}{\gamma_A} = \sqrt{\frac{c}{a}} \approx 1\,, \tag{23'}$$

$$\frac{\beta_A^2}{\gamma_A^2} = \frac{F^2 c + D^2 a}{a\,B^2} \ll 1\,. \tag{24'}$$

Diese Gleichungen entsprechen genau denjenigen, die bei einer Vereinfachung durch Vernachlässigung der äußeren Momente gefunden werden; die Werte (21′) und (23′) stimmen außerdem mit den entsprechenden Ergebnissen für $\beta = \dot{\beta} = \ddot{\beta} = 0$ überein, so daß die früher durchgeführten Näherungsbetrachtungen nachträglich gerechtfertigt erscheinen.

Die Anzeigefehler (25) und (26) müssen noch genauer untersucht werden, da sie das eigentliche Ergebnis dieser Arbeit darstellen. Die mittlere „dynamische Elevation" $\bar{\alpha}$ wird so klein, daß ihr keine weitere Beachtung geschenkt zu werden braucht. Das verhältnismäßig große Rückstellmoment $(Q + K)$ ist die einleuchtende Ursache hierfür. Für die mittlere azimutale Fehlanzeige findet man

$$\bar{\gamma} \approx \frac{n^2\alpha_A^2}{2\,K}\left[DE\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{B}\sqrt{\frac{a}{c}}\right) + F\right] \approx \frac{n^2\alpha_A^2}{2\,K}F \approx \frac{b^2\alpha_A^2}{2\,K\,a\,c}F\,, \tag{26'}$$

$$\bar{\gamma} \approx \frac{b^2\gamma_A^2}{2\,K\,a^3}F\,. \tag{27}$$

Von den Kippmassen hat nur F einen wesentlichen Einfluß auf die Größe von $\bar{\gamma}$. Die Forderung nach einer Anzeigegenauigkeit von 1 Bogenminute führt nach (27) zu der Forderung, den Betrag von F auf 0,55 kg cm² oder 0,2% von B zu begrenzen, wobei die Amplitude der Nutationsschwingung mit $\gamma_A = 2 \cdot 10^{-4}$, also erheblich weniger als 1 Bogenminute, sowie $\varphi = 50°$ angenommen wurde.

Die Formel (27) für die azimutale Fehlanzeige läßt sich leichter übersehen, wenn anstelle der Abkürzungen wieder die ursprünglichen Werte eingesetzt werden. Es folgt dann

$$\bar{\gamma} = \frac{B_R\, \omega\, F}{2\, \omega^2\, (A + A_R)^2 \cos\varphi}\, \gamma_A^2 . \tag{28}$$

Hieraus ergibt sich: Wird der Drehimpuls $B_R\, \omega$ des Kreisels als konstant angenommen, so hängt die Fehlanzeige $\bar{\gamma}$ außer von der Kippmasse F der Kugel noch wesentlich von der Amplitude der Nutationsschwingung γ_A, von der Drehmasse $(A + A_R)$ des Gesamtsystems um die x_K-Achse und von der geographischen Breite φ ab. Für $\varphi \to 90°$ wächst $\bar{\gamma}$ über alle Grenzen, da das Rückstellmoment zu Null wird; jedoch ist der Kreiselkompaß an den Polen sowieso unwirksam.

Wie an dem berechneten Beispiel deutlich wird, muß bei hochgenauen Kreiselkompassen auch die Kreiselaufhängung sorgfältig ausgewuchtet werden. Da auch bei anderen Kreiselgeräten die Genauigkeitsanforderungen laufend verschärft werden, wird man auch bei ihnen der Verteilung aller bewegten Massen größere Aufmerksamkeit zuwenden müssen als bisher.

(Eingegangen am 2. Mai 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *M. Klumpp*, Hamburg-Rahlstedt, am Ohlendorffturm 45b.

Analoge Systeme von Schalengleichungen

Von W. Günther

1. Einleitung. Seit langem ist es bekannt, daß man die Feldgleichungen eines elastischen Problems auf zweierlei Art formulieren kann. Das erste und übliche Verfahren besteht darin, über das Stoffgesetz alle Kraftgrößen durch die Verschiebungen auszudrücken; die Gleichgewichtsbedingungen sind dann die Differentialgleichungen des Verschiebungsfeldes. Dual dazu kann man aber auch das Gleichgewicht der Kraftgrößen automatisch herstellen, indem man Spannungsfunktionen einführt. Diese werden dann über das Stoffgesetz so bestimmt, daß ein kompatibler Verformungszustand entsteht. Welche der beiden Möglichkeiten man wählt, hängt von der Art des gestellten Problems, insbesondere von seinen Randbedingungen ab. *H. Schaefer*[1] hat gezeigt, daß sich die beiden Gleichungsgruppen für das System Platte/Scheibe (ebener Flächenträger) im wesentlichen nur durch das Vorzeichen der Querkontraktionsziffer unterscheiden, wenn man die drei Verschiebungskomponenten zu den drei Spannungsfunktionen dieses Systems in Beziehung setzt. Daß diese Analogie besteht, ist natürlich kein Zufall, sondern beruht letzten Endes auf der Existenz einer Bilinearform, in der die Kraftgrößen und die virtuellen Deformationen zu einem Skalar zusammengefaßt sind, nämlich der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte. Wenn man daher solchen Analogien nachgehen will, muß das Prinzip der virtuellen Verrückungen im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen; im Falle kleiner Verschiebungen und Deformationen kann an seine Stelle bekanntlich auch das Prinzip der virtuellen Kräfte treten. Von diesen beiden Prinzipien aus kommt man ja auch leicht zu den dualen Variationsproblemen der Elastomechanik. — Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für die allgemeine Biegetheorie der schwach verformten elastischen Schale systematisch eine Theorie aufzubauen, in der die genannten Analogien klar hervortreten. Daß bei der Schale solche Analogien bestehen, ist vor allem von russischen Forschern bemerkt worden; Ausführungen darüber findet man z. B. bei *W. S. Wlassow*[2] und *V. V. Novozhilov*[3], wo weitere russische Literatur angegeben ist; kürzlich hat ferner *H. Schaefer* [4] die Gleichungen des geraden Kreiszylinders untersucht und die vollständige Analogie beider Gleichungsgruppen festgestellt. Versucht man nun, die Analogien für eine beliebige Schale nicht nur hinzuschreiben — was nach einigen Vernachlässigungen mit den Mitteln der Tensorrechnung nicht allzu schwierig ist —, sondern systematisch herzuleiten, so zeigt es sich, daß die Statik und Kinematik der Schale als die einer sogenannten *Cosserat*schen Fläche anzusehen ist, einer Fläche also, die aus lauter orientierten Elementen besteht. Mit Hilfe dieses Schalenmodells lassen sich, wenn man das Prinzip der virtuellen Verrückungen benutzt, sämtliche kinematischen und statischen Gleichungen der Schale so einfach und in ihren Analogien so prägnant formulieren, daß man sie sich ohne Schwierigkeit jederzeit ins Gedächtnis zurückrufen kann. Durch geschickte Wahl der Feldgrößen kann man dann auch noch das Elastizitätsgesetz in die Analogie einbeziehen und erhält so schließlich die gesuchten beiden Darstellungen des Schalenproblems.

2. Flächentheoretische Hilfsmittel. Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger Begriffe und Formeln der Flächentheorie, wobei wir uns in der Darstellung an *A. E. Green* u. *W. Zerna*[5] anschließen:

Seien $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ *Gauß*sche Parameter auf einer Fläche, und sei, von einem festen Punkte 0 ausgehend,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^{(1)}, q^{(2)}) \tag{2,1}$$

der Ortsvektor zu einem nicht singulären Punkte P dieser Fläche hin, so können wir in P ein lokales Dreibein definieren durch die „Maßvektoren"

$$\boldsymbol{a}_i = \partial_i \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \qquad (i = 1, 2) \tag{2,2}$$

[1] *H. Schaefer*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 8 (1956) S. 142.
[2] *W. S. Wlassow*, Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Berlin 1958.
[3] *V. V. Novozhilov*, The Theory of Thin Shells, Groningen 1959.
[4] *H. Schaefer*, Ing.-Arch. 29 (1960) S. 125.
[5] *A. E. Green* u. *W. Zerna*, Theoretical Elasticity, Oxford 1954.
* Während der Drucklegung dieses Aufsatzes erhielt der Verfasser noch Kenntnis von folgender Arbeit, die sich vor allem auf [2] stützt und die Analogien in der technischen Biegetheorie dünner Schalen behandelt: *H. Duddeck*, Diss. T. H. Hannover 1960.

und den Normaleneinheitsvektor

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|} \tag{2,3}$$

der Fläche (Abb. 1). Mit den Maßvektoren $\boldsymbol{a}_i$ tangieren auch die „kovarianten Permutationsvektoren"

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a}_i \qquad (i = 1, 2) \tag{2,4}$$

und die „Krümmungsvektoren"

$$\boldsymbol{b}_i = -\partial_i \boldsymbol{E} \qquad (i = 1, 2) \tag{2,5}$$

die Fläche. Geht man nun zu neuen Parametern $\bar{q}^{(1)}$ und $\bar{q}^{(2)}$ über, so erhält man die zugehörigen Vektoren $\bar{\boldsymbol{a}}_i$, $\bar{\boldsymbol{e}}_i$ und $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ durch eine „kovariante Transformation"

$$\bar{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{a}_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i}, \qquad \bar{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i}, \qquad \bar{\boldsymbol{b}}_i = \boldsymbol{b}_\alpha \frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i} \tag{2,6}$$

(über griechische Indizes wird von 1 bis 2 summiert!). Vektoren, die sich in ihrem Index so transformieren, nennen wir „kovariant indiziert". Durch „kovariante Projektion", d. h. durch skalares Multiplizieren mit den Maßvektoren, erhält man

1. die kovariante Darstellung des „Maßtensors" („erster Haupttensor der Fläche"):

$$a_{il} = \boldsymbol{a}_i \circ \boldsymbol{a}_l = a_{li} \tag{2,7}$$

mit der Determinante

$$a = a_{11}\, a_{22} - (a_{12})^2, \tag{2,8}$$

2. die kovariante Darstellung des „Permutationstensors" der Fläche:

$$e_{il} = \boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{a}_l = -e_{li}, \tag{2,9}$$

$$|e_{il}| = \sqrt{a} \quad \text{für} \quad l \neq i, \tag{2,10}$$

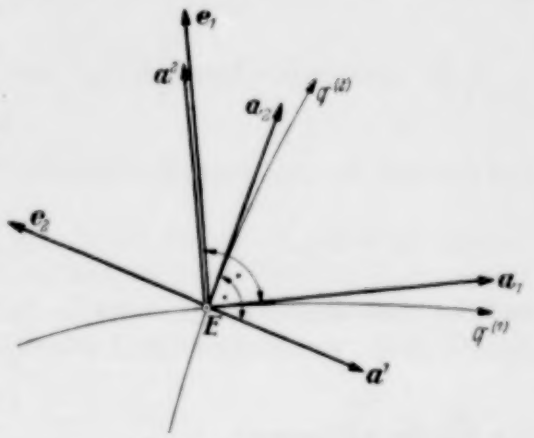

Abb. 1. Maß- und Permutationsvektoren.

und

3. die kovariante Darstellung des „zweiten Haupttensors der Fläche":

$$b_{il} = \boldsymbol{b}_i \circ \boldsymbol{a}_l = -\partial_i \boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{a}_l = +\boldsymbol{E} \circ \partial_i \partial_l \boldsymbol{r} = b_{li} \tag{2,11}$$

mit der Determinante

$$b = b_{11}\, b_{22} - (b_{12})^2. \tag{2,12}$$

Der „dritte Haupttensor der Fläche" ist durch

$$c_{il} = \boldsymbol{b}_i \circ \boldsymbol{b}_l = c_{li} \tag{2,13}$$

definiert.

Häufig ist es zweckmäßig, die Symmetrieverhältnisse eines Tensors zweiter Stufe besonders hervorzuheben: Sei u_{il} ein solcher Tensor, dann kennzeichnen wir durch

$$\hat{u}_{il} = \frac{1}{2}(u_{il} + u_{li}) \tag{2,14}$$

seinen symmetrischen, durch

$$\overset{\times}{u}_{il} = \frac{1}{2}(u_{il} - u_{li}) \tag{2,15}$$

seinen antimetrischen („schiefsymmetrischen") Teil. Ihre Summe ergibt wieder den ursprünglichen Tensor. Danach ist

$$a_{il} = \hat{a}_{il}, \qquad e_{il} = \overset{\times}{\boldsymbol{e}}_{il}, \qquad b_{il} = \hat{b}_{il}, \qquad c_{il} = \hat{c}_{il}. \tag{2,16}$$

In bekannter Weise erzeugen wir nun ferner die „kontravarianten Maßvektoren" $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, 2)$ als Lösungen der Gleichungen

$$\boldsymbol{a}^i \circ \boldsymbol{a}_l = a^i_l = \delta^i_l = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \neq i, \\ 1 & \text{für} \quad l = i \end{cases}; \tag{2,17}$$

bei einer Parametertransformation werden sie durch die „kontravariante Transformation“

$$\bar{\boldsymbol{a}}^i = \boldsymbol{a}^\alpha \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^\alpha} \tag{2,18}$$

in die neuen kontravarianten Meßvektoren $\bar{\boldsymbol{a}}^i$ überführt. Dasselbe Transformationsgesetz gilt auch für die „kontravarianten Permutationsvektoren“

$$\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a}^i . \tag{2,19}$$

Kontravariante Projektion ergibt:

1. die kontravariante Darstellung des Maßtensors der Fläche:

$$a^{il} = \boldsymbol{a}^i \circ \boldsymbol{a}^l = \hat{a}^{il} , \tag{2,20}$$

$$\mathrm{Det}\,(a^{il}) = \frac{1}{a} , \tag{2,21}$$

2. die kontravariante Darstellung des Permutationstensors der Fläche:

$$e^{il} = \boldsymbol{e}^i \circ \boldsymbol{a}^l = \overset{\times}{e}{}^{il} , \tag{2,22}$$

$$|e^{il}| = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{für} \quad l \neq i , \tag{2,23}$$

3. die „gemischte Darstellung“ des 2. Haupttensors der Fläche:

$$b^i_l = \boldsymbol{b}_l \circ \boldsymbol{a}^i = a^{i\alpha} b_{l\alpha} , \tag{2,24}$$

aus der sich die „mittlere Krümmung“

$$H = \frac{1}{2} b^\alpha_\alpha \tag{2,25}$$

und die „Gaußsche Krümmung“

$$K = \mathrm{Det}\,(b^i_l) = \frac{b}{a} \tag{2,26}$$

der Fläche aufbauen.

Die Maßzahlen dieses Tensors b^i_l haben stets die Dimension einer reziproken Länge; für die „Krümmungslinien“ der Fläche, also für diejenigen Parameterkurven, welche überall die Hauptrichtungen des Tensors b^i_l tangieren (und daher ein Orthogonalnetz bilden), wird, mit R_1 und R_2 als Hauptkrümmungsradien der Fläche, bei geeigneter Orientierung des Koordinatensystems

$$b^1_1 = -\frac{1}{R_1} , \qquad b^2_2 = -\frac{1}{R_2} ; \tag{2,27}$$

dabei ist die *Gauß*sche Krümmung als nicht negativ angenommen worden.

Die Anwendung elementarer Vektoroperationen führt noch zu folgenden, gelegentlich nützlichen Formeln

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_i , \qquad \boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}^i , \tag{2,28}$$

$$e_{ik}\, e^{lm} = \delta^l_i\, \delta^m_k - \delta^m_i\, \delta^l_k , \qquad e_{i\alpha}\, e^{l\alpha} = \delta^l_i , \tag{2,29}$$

$$K \delta^l_i - 2 H b^l_i + c^l_i = 0 . \tag{2,30}$$

Sei nun $\nabla_i(\ldots)$ das Symbol der kovarianten Differentiation bezüglich der Flächenparameter $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$. Es gilt dann

$$\left.\begin{aligned} \nabla_i \boldsymbol{E} &= \partial_i \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{b}_i = -b^\alpha_i \boldsymbol{a}_\alpha , \\ \nabla_i \boldsymbol{a}_l &= b_{il} \boldsymbol{E} , \quad \nabla_i \boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{a}_l \times \boldsymbol{b}_i . \end{aligned}\right\} \tag{2,31}$$

Hieraus folgt

$$\nabla_i a_{lm} = 0 , \qquad \nabla_i e_{lm} = 0 \tag{2,32}$$

(Maß- und Permutationstensor sind also kovariant konstant) und ferner

$$e^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \boldsymbol{b}_\beta = 0 \rightarrow e^{\alpha\beta} \nabla_\alpha b_{\beta l} = 0 , \tag{2,33}$$

die Gleichungen von *Codazzi* für den 2. Haupttensor der Fläche, die erfüllt sein müssen, wenn ein eindeutiges Feld von Normalenvektoren der Fläche existieren soll.

Auf der Fläche sei jetzt ein räumliches Vektorfeld $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(q^{(1)}, q^{(2)})$ gegeben mit den Zerlegungen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha + v\,\boldsymbol{E} = v^\alpha \boldsymbol{a}_\alpha + v\,\boldsymbol{E}\,, \\ v_i &= \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{a}_i\,, \quad v^i = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{a}^i\,, \quad v = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{E}\,; \end{aligned}\right\} \tag{2,34}$$

in $\boldsymbol{v}$ sind also, im Sinne der Tensorrechnung, der Vektor v_i bzw. v^i und der Skalar v zusammengefaßt. Ähnlich für die kovariant indizierten räumlichen Vektorfelder $\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{v}_l(q^{(1)}, q^{(2)})$:

$$\boldsymbol{v}_l = v_{l\alpha} \boldsymbol{a}^\alpha + v_l \boldsymbol{E} = v_{l\cdot}^{\alpha} \boldsymbol{a}_\alpha + v_l \boldsymbol{E}\,, \quad v_{lm} = \boldsymbol{v}_l \circ \boldsymbol{a}_m\,, \quad v_{l\cdot}^{m} = \boldsymbol{v}_l \circ \boldsymbol{a}^m\,, \quad v_l = \boldsymbol{v}_l \circ \boldsymbol{E}\,. \tag{2,35}$$

Offenbar lassen sich auch mehrfach indizierte Vektorfelder leicht herstellen, etwa durch

$$\boldsymbol{v}_{lm} = \boldsymbol{v}_l \times \boldsymbol{v}_m = \overset{\times}{\boldsymbol{v}}_{lm}\,; \tag{2,36}$$

für solche Felder gelten dann entsprechende Zerlegungen. — Das kovariante Differenzieren von Vektorfeldern geht nach (2.31) so vor sich:

$$\begin{aligned} \nabla_i \boldsymbol{v}\,(= \partial_i \boldsymbol{v}) &= (\nabla_i v_\alpha - b_{i\alpha}\, v)\, \boldsymbol{a}^\alpha + (\nabla_i v + b_i^\alpha\, v_\alpha)\, \boldsymbol{E} \\ &= (\nabla_i v^\alpha - b_i^\alpha\, v)\, \boldsymbol{a}_\alpha + (\nabla_i v + b_{i\alpha}\, v^\alpha)\, \boldsymbol{E}\,; \end{aligned} \tag{2,37}$$

$$\begin{aligned} \nabla_i \boldsymbol{v}_l &= (\nabla_i v_{l\alpha} - b_{i\alpha}\, v_l)\, \boldsymbol{a}^\alpha + (\nabla_i v_l + b_i^\alpha\, v_{i\alpha})\, \boldsymbol{E} \\ &= (\nabla_i v_{l\cdot}^{\alpha} - b_i^\alpha\, v_l)\, \boldsymbol{a}_\alpha + (\nabla_i v_l + b_{i\alpha}\, v_{l\cdot}^{\alpha})\, \boldsymbol{E}\,, \end{aligned} \tag{2,38}$$

mit leichter Verallgemeinerung auf mehrfach indizierte Vektorfelder.

3. Kinematik der Schalenmittelfläche. Wir denken uns (Abb. 2) die Schale aufgelöst in eine — zunächst endliche — Anzahl starrer Blöcke, deren Mittelflächen sich im unverformten Zustand der Schale zur unverformten Schalenmittelfläche zusammenschließen; sie seien dreh- und verschiebbar federnd gegeneinander so abgestützt, daß in der Ausgangslage alle Federn entspannt sind. Durch Grenzübergang erhalten wir als kinematisches Modell der Schale eine Fläche, die geometrisch mit der Schalenmittelfläche zusammenfällt, aber in jedem ihrer Punkte durch die räumliche Lage des zugehörigen Blockes orientiert ist. Jeder „Punkt" dieser Fläche kann sich mit 6 Freiheitsgraden bewegen und ist gegen seine Nachbar-„punkte" federnd so abgestützt, wie es das (später zu erörternde) Elastizitätsgesetz der Schale verlangt. Statt von einem Kontinuum „orientierter Punkte" können wir natürlich auch von einem Kontinuum orientierter Koordinatensysteme sprechen, deren Anfangspunkte auf der Schalenmittelfläche liegen. Kurz: es handelt sich bei unserem Modell um eine „*Cosserat*sche Fläche", nach *E.* und *F. Cosserat*[1], die in einer Monographie die Kinematik und Statik solcher, aus orientierten Punkten bestehenden Kontinuen untersucht haben (in moderner Schreibweise behandelte der Verfasser[2] die Grundgedanken der *Cosserat*schen Konzeption). Dieses Schalenmodell — im übrigen die sinngemäße Erweiterung des Modells der technischen Biegelehre des Balkens — ist nun alles andere als neu: bereits bei *E.* und *F. Cosserat* wird die Schale als Beispiel herangezogen, eine eigentliche Schalentheorie jedoch nicht angestrebt; die heute nur noch schwer lesbare Darstellung ist nicht kovariant. *K. Heun*[3] benutzt, ohne sachlich über das *Cosserat*sche Buch hinauszugehen, die symbolische Vektorrechnung, wodurch die Darstellung übersichtlicher wird. *J. L. Ericksen* und *C. Truesdell*[4] schließlich entwickeln, mit anderer Zielsetzung als wir, eine Theorie endlich verformter Schalen auf der Basis der *Cosserat*schen Vorstellungen. — Wir werden sehen, daß uns gerade dieses Modell zu einer außerordentlich symmetrischen und daher übersichtlichen Schalentheorie führen wird.

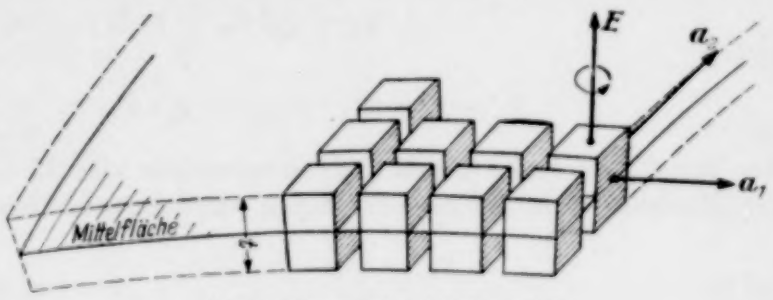

Abb. 2. *Cosserat*sches Schalenmodell.

[1] *E. et F. Cosserat*, Théorie des corps déformables, Paris 1909.
[2] *W. Günther*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 10 (1958) S. 195.
[3] *K. Heun*, Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik, Enz. d. Math. Wiss. IV, 2, 11, Leipzig 1914.
[4] *J. L. Ericksen & C. Truesdell*, Arch. Rat. Mech. and Analysis 1,4 (1958) S. 295.

Die Lageänderungen eines „orientierten Punktes" der Schalenmittelfläche sind: eine Drehung, die so klein sei, daß man sie durch einen Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ beschreiben darf, und eine Verschiebung $\boldsymbol{v}$; es sei $|\boldsymbol{v}|$ klein im Verhältnis zur Schalendicke t. Die Funktionen

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(q^{(1)}, q^{(2)}) = \omega^\alpha \boldsymbol{a}_\alpha + \omega \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(q^{(1)}, q^{(2)}) = v_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha + v \boldsymbol{E} \tag{3,1}$$

sollen über der Mittelfläche stetig und genügend oft stetig differenzierbar sein. Unter ihnen befinden sich natürlich auch die starren Bewegungen

$$\mathring{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_0, \qquad \mathring{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \tag{3,2}$$

eines endlichen Schalenteils, mit konstanten Vektoren $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)$, $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0)$. Aus den Lageänderungen (3.1) leiten wir die Deformationen als relative Drehungs- und Verschiebungsänderungen folgendermaßen her: Die absoluten Änderungen sind

$$(d\boldsymbol{\omega})_{absolut} = \partial_\alpha \boldsymbol{\omega}\, dq^\alpha = \nabla_\alpha \boldsymbol{\omega}\, dq^\alpha, \qquad (d\boldsymbol{v})_{absolut} = \partial_\alpha \boldsymbol{v}\, dq^\alpha = \nabla_\alpha \boldsymbol{v}\, dq^\alpha; \tag{3,3}$$

ferner ist

$$(d\boldsymbol{\omega})_{absolut} = (d\boldsymbol{\omega}), \qquad (d\boldsymbol{v})_{absolut} = (d\boldsymbol{v})_{relativ} + \boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{r}. \tag{3,4}$$

Setzen wir die relativen Änderungen als lineare Funktionen der Fortschreitungsdifferentiale dq^i an:

$$(d\boldsymbol{\omega})_{relativ} = \boldsymbol{\chi}_\alpha\, dq^\alpha, \qquad (d\boldsymbol{v})_{relativ} = \boldsymbol{\epsilon}_\alpha\, dq^\alpha, \tag{3,5}$$

und beachten, daß nach (1.2) auf der Schalenmittelfläche

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_\alpha\, dq^\alpha \tag{3,6}$$

ist, so erhalten wir

$$\boldsymbol{\chi}_i = \nabla_i \boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_i = \nabla_i \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3,7}$$

Diese Deformationen sind offensichtlich kovariant indizierte Vektorfelder. Wir zerlegen sie:

$$\boldsymbol{\chi}_i = \chi_i{}^{\cdot}_{\cdot\alpha}\, \boldsymbol{a}_\alpha + \chi_i \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_i = \varepsilon_{i\alpha} \boldsymbol{a}^\alpha + \varepsilon_i \boldsymbol{E} \tag{3,8}$$

mit

$$\chi_i{}^{l}_{\cdot} = \boldsymbol{\chi}_i \circ \boldsymbol{a}^l, \qquad \chi_i = \boldsymbol{\chi}_i \circ \boldsymbol{E}, \qquad \varepsilon_{il} = \boldsymbol{\epsilon}_i \circ \boldsymbol{a}_l, \qquad \varepsilon_i = \boldsymbol{\epsilon}_i \circ \boldsymbol{E}. \tag{3,9}$$

Aus den 6 Lageänderungen (3.1) entspringen also 12 Deformationsgrößen, die sich nach (2.37) aus den Maßzahlen der Lageänderungen wie folgt ableiten:

$$\chi_i{}^{l}_{\cdot} = \nabla_i \omega^l - b_i^l\, \omega, \qquad \chi_i = \nabla_i \omega + b_{i\alpha}\, \omega^\alpha; \tag{3,10}$$

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i v_l - b_{il}\, v - e_{il}\, \omega, \qquad \varepsilon_i = \nabla_i v + b_i^\alpha\, v_\alpha + e_{i\alpha}\, \omega^\alpha. \tag{3,11}$$

Die zweite der Gleichungen (3.7) bzw. die Gleichungen (2.11) können nach der Drehung $\boldsymbol{\omega}$ bzw. ihren Maßzahlen aufgelöst werden:

$$\boldsymbol{\omega} = (\nabla_\alpha \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\epsilon}_\alpha) \circ \mathfrak{N}^\alpha \tag{3,12}$$

mit den dyadisch dargestellten Matrizen

$$\mathfrak{N}^i = -\boldsymbol{E}\, \boldsymbol{e}^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{E}, \tag{3,13}$$

bzw.

$$\omega^i = e^{i\alpha} (\nabla_\alpha v + b_\alpha^\beta\, v_\beta - \varepsilon_\alpha), \qquad \omega = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha v_\beta - \overset{\times}{\varepsilon}_{\alpha\beta}); \tag{3,14}$$

in (3.12) kommen also nur die Größen $\varepsilon_i = \boldsymbol{\epsilon}_i \circ \boldsymbol{E}$ und der antimetrische Teil des Deformationstensors wirklich vor.

Die geometrische Bedeutung der Deformationsmaßzahlen (3.10) und (3.11) liegt nach ihrer Entstehung auf der Hand: die $\chi_i{}^{l}_{\cdot}$ sind die „Verkrümmungen" der Schale, die χ_i die Normalkomponenten der relativen Drehung. Der symmetrische Teil $\hat{\varepsilon}_{il}$ des Tensors ε_{il} beschreibt die in der Tangentialebene stattfindenden Deformationen der als Punktkontinuum aufgefaßten Mittelfläche; seien nämlich

$$\boldsymbol{a}_i' = \partial_i (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}_i + \nabla_i \boldsymbol{v} \tag{3,15}$$

die Maßvektoren der verformten Mittelfläche, so wird, bei Vernachlässigung von Produkten aus Deformationsgrößen, der neue Maßtensor:

$$a'_{il} = \boldsymbol{a}'_i \circ \boldsymbol{a}'_l = a_{il} + 2\,\hat{\varepsilon}_{il}\,, \tag{3,16}$$

$$\hat{\varepsilon}_{il} = \frac{1}{2}\,(\nabla_i v_l + \nabla_l v_i) - b_{il}\,v\,; \tag{3,17}$$

$1/2\,(a'_{il} - a_{il})$ ist aber gerade die genannte Deformation. Wir merken noch an, daß wegen

$$a^{i\alpha'}\,a'_{l\alpha} = \delta^{i'}_{l} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \neq i \\ 1 & \text{für} \quad l = i \end{cases} \tag{3,18}$$

für die Differenz der kontravarianten Maßvektoren gilt:

$$a^{il'} - a^{il} = -\,2\,\hat{\varepsilon}^{il}\,. \tag{3,19}$$

Der schiefsymmetrische Teil $\overset{\times}{\varepsilon}_{il}$ ist einem skalaren Winkel ψ äquivalent:

$$\psi = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta}\,\overset{\times}{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,, \qquad \overset{\times}{\varepsilon}_{il} = e_{il}\,\psi\,, \tag{3,20}$$

und es wird nach (3.11)

$$\psi = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha v_\beta - \omega\,. \tag{3,21}$$

Dies zeigt, daß $\overset{\times}{\varepsilon}_{il}$ dem Unterschied zwischen der aus der Mittelflächendeformation stammenden „mittleren Drehung" und der *Cosserat*schen Drehung ω um die Schalennormale entspricht.

Zur Deutung der Größen ε_i: Der Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{E}'$ der verformten Mittelfläche geht durch eine kleine Drehung $\boldsymbol{\vartheta}$ aus $\boldsymbol{E}$ hervor:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{E}\,, \tag{3,22}$$

fällt jedoch i. a. nicht in die Richtung der vom örtlichen Block mitgenommenen Normalen der unverformten Mittelfläche

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{E}\,. \tag{3,23}$$

Aus

$$\boldsymbol{E}' \circ \boldsymbol{a}'_i = 0 \tag{3,24}$$

und (3.15) folgt dann leicht

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \circ \nabla_\alpha \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{a}^\alpha\,, \tag{3,25}$$

und weiter mit (3.7)

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'' - \varepsilon_\alpha\,\boldsymbol{a}^\alpha\,. \tag{3,26}$$

Daraus bestimmt sich $\boldsymbol{\vartheta}$ zu

$$\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{e}^\alpha\,\varepsilon_\alpha\,. \tag{3,27}$$

Die Verformungen ε_i sind also ein Maß dafür, wie weit sich eine bei der Verformung mitgenommene Normale der unverformten Mittelfläche aus der Normalen der verformten Mittelfläche herausgedreht hat — es handelt sich somit um die Querschubverformungen der Schale. Sind nun die Deformationen $\boldsymbol{\chi}_i$ und $\boldsymbol{\epsilon}_i$ als Funktionen der Flächenparameter gegeben, so wird es im allgemeinen nicht möglich sein, aus ihnen eindeutige Lageänderungen $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{v}$ durch Integration der Gleichungen (3.7) zu errechnen. Damit dies möglich wird, müssen vielmehr die Deformationen gewissen „Verträglichkeitsbedingungen" — natürlich im *Cosserat*schen Sinne — genügen, die sich von (3.7) her nach (2.31) leicht hinschreiben lassen:

$$e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha \boldsymbol{\chi}_\beta = 0\,, \qquad e^{\alpha\beta}\,(\nabla_\alpha \boldsymbol{\epsilon}_\beta + \boldsymbol{a}_\alpha \times \boldsymbol{\chi}_\beta) = 0\,. \tag{3,28}$$

Sind sie erfüllt, so liefert die Integration von (3.7), erstreckt über eine von P_0 (Ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$) nach P (Ortsvektor $\boldsymbol{r}$) führende Flächenkurve C (laufender Ortsvektor $\boldsymbol{s}$) die von der speziellen Wahl der Verbindungskurve unabhängigen Lageänderungen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0) + \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{\chi}_\alpha\,dq^\alpha\,, \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) + \int_{P_0}^{P} [\boldsymbol{\epsilon}_\alpha - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{\chi}_\alpha]\,dq^\alpha\,; \end{aligned}\right\} \tag{3,29}$$

die ausintegrierten Teile sind die starren Bewegungen (3,2). Sehen wir von diesen ab, und beachten die Definition (3.5) der Deformationen, so wird

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) = \int_{P_0}^{P} (d\boldsymbol{\omega})_{relativ}\,, \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \int_{P_0}^{P} [(d\boldsymbol{v})_{relativ} - (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \times (d\boldsymbol{\omega})_{relativ}]\,; \tag{3,30}$$

bis auf eine starre Bewegung sind die Lageänderungen in P durch die für diesen Aufpunkt berechnete Kinemate der relativen Lageänderungen zwischen P_0 und P gegeben.

Wir ordnen nun jedem Punkte der Flächenkurve C (die insbesondere die Randkurve der Schalenmittelfläche sein kann) ein Dreibein von Einheitsvektoren zu: $\boldsymbol{n}$ sei ihr, in der Tangentialebene liegender Normaleneinheitsvektor, $\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{s}}{ds}$ ihr Tangenteneinheitsvektor, und $\boldsymbol{E}$ wie bisher der Einheitsvektor der Flächennormalen; $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{E}$ sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, so daß $\boldsymbol{n}$ der Vektor der äußeren Normalen ist, wenn ein Flächenelement im positiven Sinne umfahren wird. Wir zerlegen

$$(d\boldsymbol{\omega})_{relativ} = \boldsymbol{\chi}\, ds\,, \qquad (d\boldsymbol{v})_{relativ} = \boldsymbol{\epsilon}\, ds \tag{3,31}$$

nach diesen Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} (d\boldsymbol{\omega})_{relativ} &= (\chi_N\, ds)\, \boldsymbol{n} + (\chi_D\, ds)\, \boldsymbol{t} + (\chi_G\, ds)\, \boldsymbol{E}\,, \\ (d\boldsymbol{v})_{relativ} &= (\gamma\, ds)\, \boldsymbol{n} + (\varepsilon\, ds)\, \boldsymbol{t} + (\beta\, ds)\, \boldsymbol{E}\,; \end{aligned}\right\} \tag{3,32}$$

darin ist

χ_N die Änderung der Normalkrümmung, χ_D die Änderung der Torsion, χ_G die Änderung der geodätischen Krümmung der Integrationskurve infolge der Flächendeformation, γ ihre Richtungsänderung in der Tangentialebene, ε ihre Dehnung und $\beta = \varepsilon_\alpha\, t^\alpha$ ihre Richtungsänderung in der $\boldsymbol{t}$ — $\boldsymbol{E}$-Ebene.

Wir setzen (3,32) in (3,30) ein, nehmen im zweiten Integral eine partielle Integration vor und lassen die ausintegrierten Terme fort, die wieder starre Bewegungen darstellen.

Es bleibt schließlich

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) &= \int_{P_0}^{P} (\chi_N\, \boldsymbol{n} + \chi_D\, \boldsymbol{t} + \chi_G\, \boldsymbol{E})\, ds\,, \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) &= \int_{P_0}^{P} \left\{ \varepsilon\, \boldsymbol{t} - (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}) \left[(\chi_N\, \boldsymbol{n} + \chi_D\, \boldsymbol{t} + \chi_G\, \boldsymbol{E}) + \frac{\partial}{\partial s} (\beta\, \boldsymbol{n} - \gamma\, \boldsymbol{E}) \right] \right\} ds\,. \end{aligned}\right\} \tag{3,33}$$

Kinematisch bedeutet diese Umformung, daß bei der Berechnung der Verschiebungen aus den Deformationen die Schubverformungen β und γ nicht selbständig auftreten, sondern in „kinematisch äquivalente Zusatzverkrümmungen" umgewandelt werden. Wir können aber nicht nur $\boldsymbol{v}$, sondern auch — was für das Randwertproblem wichtig ist — die Änderung $\partial \boldsymbol{v}/\partial n$ senkrecht zur Flächenkurve C berechnen: es ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n} = n^\alpha \nabla_\alpha \boldsymbol{v} \quad \text{mit} \quad n^i = \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{a}^i\,; \tag{3,34}$$

dies gibt, in (3,7) eingesetzt,

$$\boldsymbol{n} \circ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n} = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\, n^\alpha\, n^\beta\,, \qquad \boldsymbol{t} \circ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n} = \varepsilon_{\alpha\beta}\, n^\alpha\, t^\beta + \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{E} \circ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n} = \varepsilon_\alpha\, n^\alpha - \boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{t} \tag{3,35}$$

oder, wenn wir in dyadischer Darstellung die Matrizen

$$\mathfrak{E} = \varepsilon_{\alpha\beta}\, \boldsymbol{a}^\alpha\, \boldsymbol{a}^\beta + \varepsilon_\alpha\, \boldsymbol{a}^\alpha\, \boldsymbol{E} \tag{3,36}$$

(die Deformationsmatrix) und

$$\mathfrak{T} = \boldsymbol{E}\, \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}\, \boldsymbol{E}$$

benutzen,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n} = \boldsymbol{n} \circ \mathfrak{E} + \boldsymbol{\omega} \circ \mathfrak{T}\,; \tag{3,37}$$

$\boldsymbol{\omega}$ ist natürlich aus (3,33) zu entnehmen.

Wir kehren nun zu den Verträglichkeitsbedingungen (3,28) zurück und geben noch ihre Tensordarstellung an:

$$e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \chi_{\beta.}^{\ l} - b_\alpha^l \chi_\beta) = 0\,, \qquad e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \chi_\beta + b_{\alpha\lambda} \chi_{\beta.}^{\ \lambda}) = 0\,; \tag{3,38}$$

$$e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varepsilon_{\beta l} - b_{\alpha l}\, \varepsilon_\beta - e_{\alpha l}\, \chi_\beta) = 0\,, \qquad e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varepsilon_\beta + b_\alpha^\lambda\, \varepsilon_{\beta\lambda} + e_{\alpha\lambda}\, \chi_{\beta.}^{\ \lambda}) = 0\,. \tag{3,39}$$

An Stelle der Verkrümmungen χ_i wollen wir nun — im Hinblick auf spätere Entwickelungen — andere Verkrümmungsgrößen

$$\boldsymbol{\varkappa}^i = \varkappa^{i\alpha}\, \boldsymbol{a}_\alpha + \varkappa^i\, \boldsymbol{E} \tag{3,40}$$

bzw.

$$\boldsymbol{\varrho}_i = \varrho_{i\alpha}\, \boldsymbol{a}^\alpha + \varrho_i\, \boldsymbol{E} \tag{3,41}$$

einführen durch

$$\boldsymbol{\varkappa}^i = e^{i\alpha}\, \boldsymbol{\chi}_\alpha\,, \qquad \boldsymbol{\chi}_i = e_{\alpha i}\, \boldsymbol{\varkappa}^\alpha \tag{3,42}$$

bzw.

$$\boldsymbol{\varrho}_i = \boldsymbol{\chi}_i \times \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{\chi}_i \circ \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{\chi}_i = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\varrho}_i + (\boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{\varrho}_i)\, \boldsymbol{E}\,; \tag{3,43}$$

in den Maßzahlen:

$$\varkappa^{il} = e^{i\alpha}\, \chi_{\alpha.}^{\ l}\,, \quad \chi_{i.}^{\ l} = e_{\alpha i}\, \varkappa^{\alpha l}\,, \qquad \varkappa^i = e^{i\alpha}\, \chi_\alpha\,, \quad \chi_i = e_{\alpha i}\, \varkappa^\alpha \tag{3,44}$$

bezw.

$$\varrho_{il} = e_{l\alpha}\, \chi_{i.}^{\ \alpha}\,, \quad \chi_{i.}^{\ l} = e^{\alpha l}\, \varrho_{i\alpha}\,, \qquad \varrho_i = \varkappa_i\,, \quad \chi_i = \varrho_i\,; \tag{3,45}$$

die Verkrümmungen $\boldsymbol{\varkappa}^i$ und $\boldsymbol{\varrho}_i$ hängen dann in ihren Maßzahlen durch

$$\varkappa^{il} = -\,e^{i\alpha}\, e^{l\beta}\, \varrho_{\alpha\beta}\,, \quad \varrho_{il} = -\,e_{\alpha i}\, e_{\beta l}\, \varkappa^{\alpha\beta}\,, \qquad \varkappa^i = e^{i\alpha}\, \varrho_\alpha\,; \quad \varrho_i = e_{\alpha i}\, \varkappa^\alpha \tag{3,46}$$

zusammen (unseren $\boldsymbol{\varkappa}^i$ entsprechen die $(-\boldsymbol{\varkappa}^i)$ bei *Schaefer*[1]). Einen schematischen Einblick in die gegenseitige Zuordnung der Größen $\boldsymbol{\chi}_i$, $\boldsymbol{\varkappa}_i$ und $\boldsymbol{\varrho}_i$ gibt die Abb. 3; man sieht, daß ϱ_{il} der in der Schalentheorie gewöhnlich verwendete Verkrümmungstensor ist (unser ϱ_{il} korrespondiert annähernd mit ω_{il} bei *Green* und *Zerna*[2], und mit $\varkappa_{il}$ bei *W. Flügge*[3]). Wir stellen jetzt diejenigen kinematischen Gleichungen für die Größen $\boldsymbol{\epsilon}_i$ und $\boldsymbol{\varkappa}_i$ bzw. $\boldsymbol{\varrho}_i$ zusammen, die für uns von

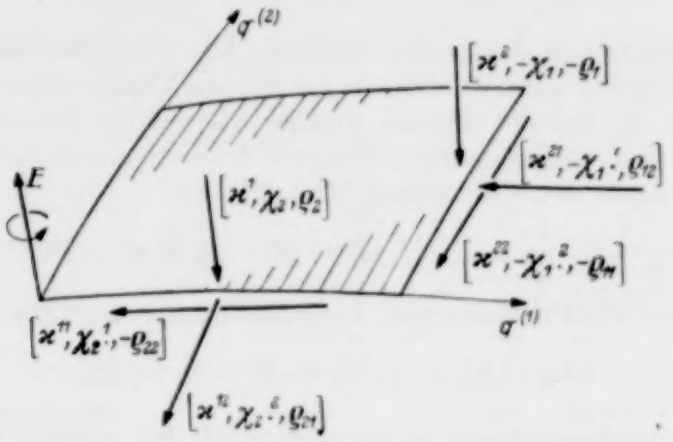

Abb. 3. Schema der Verkrümmungen.

weiterem Interesse sind. Bei Benutzung der $\boldsymbol{\varkappa}_i$ ist dies das gesamte System der kinematischen Gleichungen; dies ist bereits ein Teil unseres endgültigen Systems analoger Schalengleichungen (wir kennzeichnen sie durch einen Stern):

$$\boldsymbol{\varkappa}_i = e^{i\alpha}\, \nabla_\alpha \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_i = \nabla_i \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{\omega} \tag{3,47}^*$$

bzw.

$$\varkappa^{il} = e^{i\alpha}(\nabla_\alpha \omega^l - b_\alpha^l\, \omega)\,, \qquad \varkappa^i = e^{i\alpha}(\nabla_\alpha \omega + b_{\alpha\beta}\, \omega^\beta)\,; \tag{3,48}^*$$

$$\varepsilon_{il} = \nabla_i v_l - b_{il}\, v - e_{il}\, \omega\,, \qquad \varepsilon_i = \nabla_i v + b_i^\alpha\, v_\alpha + e_{i\alpha}\, \omega^\alpha \tag{3,49}^*$$

[1] Siehe Fußnote 4 von Seite 160.
[2] Siehe Fußnote 5 von Seite 160.
[3] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957.

und die Verträglichkeitsbedingungen

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{\varkappa}^\alpha = 0\,, \qquad e^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \boldsymbol{\epsilon}_\beta + \boldsymbol{a}_\alpha \times \boldsymbol{\varkappa}^\alpha = 0 \tag{3,50}^*$$

bzw.

$$\nabla_\alpha \varkappa^{\alpha l} - b^l_\alpha \varkappa^\alpha = 0\,, \qquad \nabla_\alpha \varkappa^\alpha + b_{\alpha\beta}\varkappa^{\alpha\beta} = 0\,; \tag{3,51}^*$$

$$e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varepsilon_{\beta l} - b_{\alpha l}\varepsilon_\beta) - e_{\alpha l}\varkappa^\alpha = 0\,, \qquad e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varepsilon_\beta + b^\lambda_\alpha \varepsilon_{\alpha\lambda}) + e_{\alpha\beta}\overset{\times}{\varkappa}{}^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{3,52}^*$$

Die erste der Gleichungen (3,52) kann nach den $\varkappa^l$ aufgelöst werden:

$$\varkappa^l = e^{l\lambda}e^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \varepsilon_{\beta\lambda} - b_{\alpha\lambda}\varepsilon_\beta)\,; \tag{3,53}^*$$

diese Größen sind daher bei einem verträglichen Deformationszustand durch die Deformationen $\boldsymbol{\epsilon}_i$ festgelegt und können, wenn es gewünscht wird, ganz aus den Verträglichkeitsbedingungen eliminiert werden.

Für den konventionellen Verkrümmungstensor ϱ_{il} geben wir seine Darstellung durch die Lageänderungen an:

$$\varrho_{il} = e_{l\alpha}(\nabla_i \omega^\alpha - b_i^\alpha\,\omega) \tag{3,54}$$

und rechnen ferner die zweite der Verträglichkeitsbedingungen (2,39) auf ihn um:

$$e^{\alpha\beta}(\varrho_{\alpha\beta} - b^\lambda_\alpha\,\varepsilon_{\beta\lambda} - \nabla_\alpha \varepsilon_\beta) = 0\,. \tag{3,55}$$

Dies zeigt, daß bei einem verträglichen Deformationszustand der Tensor

$$\tilde{\varrho}_{il} = \varrho_{il} - b_i^\alpha\,\varepsilon_{l\alpha} - \nabla_i \varepsilon_l \tag{3,56}$$

symmetrisch ist. Der Grund dafür ist leicht einzusehen: Drücken wir nämlich die rechte Seite von (3,56) nach (3,49) und (3,14) durch die Lageänderungen aus, so finden wir

$$\tilde{\varrho}_{il} = -\nabla_i \nabla_l v - b_i^\alpha \nabla_l v_\alpha - b_l^\alpha \nabla_i v_\alpha - \nabla_i b_l^\alpha \cdot v_\alpha + c_{il}\,v\,, \tag{3,57}$$

und das ist, wie eine kleine Rechnung zeigt, identisch mit

$$\tilde{\varrho}_{il} = -\nabla_i \nabla_l \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{E} \tag{3,58}$$

mit offensichtlicher Symmetrie in den beiden Indizes. Die Tatsache, daß (3,58) in den Tensor der Plattenkrümmungen übergeht, wenn die Schale zur ebenen Platte entartet, reizt zu einer anschaulichen Deutung auch für die Schale. Hierzu greifen wir auf die Darstellungen (3,15) und (3,25) für die Maßvektoren und den Normaleneinheitsvektor der verformten Schale zurück und berechnen uns den zweiten Haupttensor der verformten Mittelfläche

$$b'_{il} = -\partial_i \boldsymbol{E}' \circ \boldsymbol{a}'_l = -\nabla_i [\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} \circ \nabla_\alpha \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{a}^\alpha] \circ [\boldsymbol{a}_l + \nabla_l \boldsymbol{v}]\,; \tag{3,59}$$

vernachlässigen wir wieder die Produkte von Verschiebungen, so ergibt eine kurze Rechnung

$$b'_{il} = b_{il} + \nabla_i \nabla_l \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{E} = b_{il} - \tilde{\varrho}_{il}\,. \tag{3,60}$$

Der symmetrische Verkrümmungstensor $\tilde{\varrho}_{il}$ ist also gleich der negativen Änderung des 2. Haupttensors der Mittelfläche infolge ihrer Deformation.

4. Statik der Beanspruchungsgrößen. Die äußeren Schalenbelastungen (Volumkräfte, Kräfte an den Schalenlaibungen) reduzieren wir für jedes Schalenelement in seine Mittelfläche df hinein zu Kräften $\boldsymbol{p}\,df$ und Momenten $\boldsymbol{q}\,df$. Längs des Schalenrandes (wir setzen eine einfach berandete Schale voraus) mögen ferner an den Randelementen ds der Mittelfläche die Kräfte $d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}\,ds$ und die Mamente $d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\,ds$ angreifen. Der Rand sei in dem durch (2,3) gegebenen Sinne orientiert. Nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ist im Gleichgewichtsfalle die negative virtuelle Arbeit der inneren Kräfte und Momente, also hier der Beanspruchungsgrößen, bei der Deformation gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte und Momente. Als virtuelle Lageänderungen sind hier natürlich die unseres kinematischen Schalenmodells anzusehen. Wir definieren nun „virtuelle Deformationen" durch

$$\delta\boldsymbol{\chi}_i = \nabla_i(\delta\boldsymbol{\omega})\,, \qquad \delta\boldsymbol{\epsilon}_i = \nabla_i(\delta\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{a}_i \times \delta\boldsymbol{\omega}\,, \tag{4,1}$$

setzen also differenzierbare virtuelle Lageänderungsfelder voraus, und setzen für das Prinzip der virtuellen Verrückungen an

$$-\delta A^{(i)} = -\iint e^{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{K}_\alpha \circ \delta\boldsymbol{\epsilon}_\beta + \boldsymbol{M}_\alpha \circ \delta\boldsymbol{\chi}_\beta)\,df = \iint (\boldsymbol{p} \circ \delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q} \circ \delta\boldsymbol{\omega})\,df + \oint d\boldsymbol{K} \circ \delta\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{M} \circ \delta\boldsymbol{\omega}\,, \tag{4,2}$$

womit die zu unserer Kinematik gehörenden „Kraftbeanspruchungen" $\boldsymbol{N}_i$ und „Momentenbeanspruchungen" $\boldsymbol{M}_i$ eingeführt werden. Setzen wir (4,1) in (4,2) ein und formen nach dem *Stokes*schen Satz um, so entsteht:

$$-\iint \{(e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha \boldsymbol{K}_\beta + \boldsymbol{p}) \circ \delta\boldsymbol{v} + [e^{\alpha\beta}\,(\nabla_\alpha \boldsymbol{M}_\beta + \boldsymbol{a}_\alpha \times \boldsymbol{K}_\beta) + \boldsymbol{q}] \circ \delta\boldsymbol{\omega}\}\,df = \oint \{(d\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_\alpha\,dq^\alpha) \circ \delta\boldsymbol{v} + (d\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_\alpha\,dq^\alpha) \circ \delta\boldsymbol{\omega}\}\,. \tag{4,3}$$

Daraus folgen, weil im *Cosserat*schen Kontinuum die virtuellen Lageänderungen $\delta\boldsymbol{v}$ und $\delta\boldsymbol{\omega}$ in allen ihren Maßzahlen unabhängig voneinander gewählt werden können, die Gleichgewichtsbedingungen, gültig im Bereichsinneren,

$$e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha \boldsymbol{K}_\beta = -\boldsymbol{p}\,, \qquad e^{\alpha\beta}\,(\nabla_\alpha \boldsymbol{M}_\beta + \boldsymbol{a}_\alpha \times \boldsymbol{K}_\beta) = -\boldsymbol{q}\,, \tag{4,4}$$

und die Beziehungen

$$d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_\alpha\,dq^\alpha\,, \qquad d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_\alpha\,dq^\alpha\,, \tag{4,5}$$

gültig auf dem Bereichsrand. Nimmt man einen von Parameterkurven begrenzten Bereich, so liest man aus (4,5) die statische Bedeutung der von uns gewählten Beanspruchungsgrößen

$$\boldsymbol{K}_i = K_i{}^\alpha\,\boldsymbol{a}^\alpha + K_i\,\boldsymbol{E} \tag{4,6}$$

und

$$\boldsymbol{M}_i = M_{i\alpha}\,\boldsymbol{a}^\alpha + M_i\,\boldsymbol{E} \tag{4,7}$$

ab (vgl. Abb. 4 und 5); im wesentlichen sind: die $K_i{}^i$ Membran-Schubbeanspruchungen, die $K_i{}^l$ für $l \neq i$ Membran-Längsbeanspruchungen, und die K_i Querkraftbeanspruchungen; die M_{ii} Biegemomente, die $M_{il}\,(l \neq i)$ Drillmomente, die M_i Momente um die Schalennormale. Die

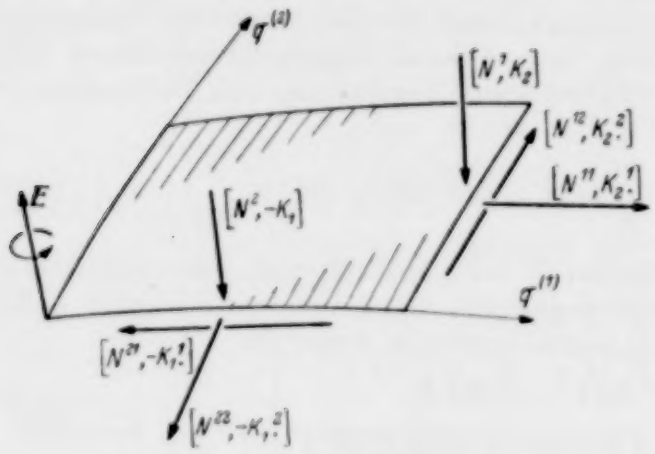

Abb. 4. Schema der Schalenkräfte.

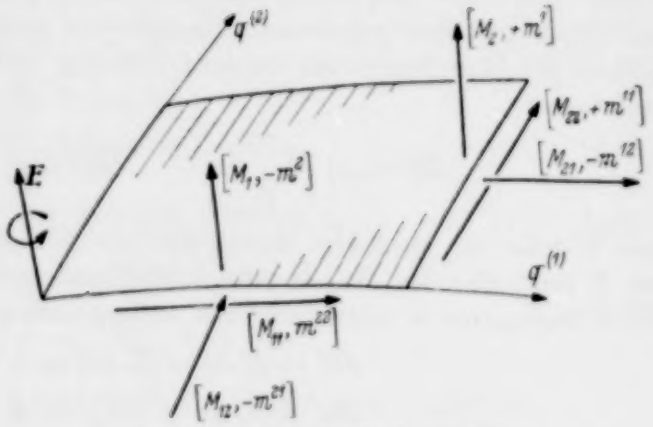

Abb. 5. Schema der Schalenmomente.

6-fach funktionale statische Unbestimmtheit des Gleichgewichtsproblems der Schale äußert sich einmal darin, daß statisch für die 12 Beanspruchungen (4,6) und (4,7) nur die 6 Gleichgewichtsbedingungen (4,4) verfügbar sind, zum anderen auch darin, daß die Zerlegungen (4,5) der Randkräfte und -momente nicht eindeutig bestimmt sind, denn die homogenen Gleichungen

$$\boldsymbol{K}_\alpha\,dq^\alpha = 0\,, \qquad \boldsymbol{M}_\alpha\,dq^\alpha = 0 \tag{4,8}$$

haben je 3 willkürliche skalare Lösungen. Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, daß die Schale von Belastungen durch Flächenkräfte und -momente frei, also nur am Rande durch ein Gleichgewichtssystem von Kräften und Momenten belastet ist; darauf läßt sich, durch Abspalten einer Partikularlösung, der allgemeine Fall stets zurückführen. Dann haben die Gleichgewichtsbedingungen

$$e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha \boldsymbol{K}_\beta = 0\,, \qquad e^{\alpha\beta}\,[\nabla_\alpha \boldsymbol{M}_\beta + \boldsymbol{a}_\alpha \times \boldsymbol{K}_\beta] = 0 \tag{4,9}$$

die Form der Verträglichkeitsbedingungen (3,28), wobei den relativen Drehungsänderungen χ_i die Kraftbeanspruchungen K_i, den relativen Verschiebungsänderungen ϵ_i die Momentenbeanspruchungen M_i entsprechen. Es folgt, daß ein den Gleichgewichtsbedingungen (4,9) genügendes System von Beanspruchungen analog zu (3,7) durch vektorielle Spannungsfunktionen $\boldsymbol{\Omega}$ und $\boldsymbol{\Phi}$ dargestellt werden kann, welche den Lageänderungen $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{v}$ entsprechen:

$$\boldsymbol{K}_i = \nabla_i \boldsymbol{\Omega}\,, \qquad \boldsymbol{M}_i = \nabla_i \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{\Omega}\,. \tag{4,10}$$

(In nicht kovarianter Form wurden die Gleichungen (4,9) und (4,10) auf anderem Wege vom Verfasser[1] hergeleitet.) Wiederum kann die zweite dieser Gleichungen nach $\boldsymbol{\Omega}$ bzw. seinen Maßzahlen aufgelöst werden (vgl. (3,12) bis (3,14)):

$$\boldsymbol{\Omega} = (\nabla_\alpha \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{M}_\alpha) \circ \mathfrak{A}^\alpha \tag{4,11}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} \Omega^i &= e^{i\alpha}\,[\nabla_\alpha \Phi + b^\beta_\alpha \Phi_\beta - M_\alpha]\,, \\ \Omega &= \frac{1}{2}\, e^{\alpha\beta}[\nabla_\alpha \Phi_\beta - \overset{\times}{M}_{\alpha\beta}]\,; \end{aligned}\right\} \tag{4,12}$$

in (4,11) kommt also der symmetrische Teil des Momententensors nicht wirklich vor.

Ist nun ein Gleichgewichtssystem von Beanspruchungen der randbelasteten Schale gegeben, so können, entsprechend (3,29), die zugehörigen vektoriellen Spannungsfunktionen durch Integration von (4,10) nach Vorgabe ihrer Anfangswerte eindeutig berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}_0) + \int_{P_0}^{P} \boldsymbol{K}_\alpha\, dq^\alpha\,, \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) + \int_{P_0}^{P} [\boldsymbol{M}_\alpha - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{K}_\alpha]\, dq^\alpha\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,13}$$

Die ausintegrierten Terme

$$\mathring{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}_0)\,, \qquad \mathring{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,, \tag{4,14}$$

welche den starren Bewegungen (3,2) entsprechen, sind die „Nullspannungsfunktionen" der Schalenstatik, denn sie erzeugen, in (4,9) eingesetzt, offenbar einen beanspruchungsfreien Zustand der Schale. Mit Hilfe von (4,10) und (4,5) können wir nunmehr auch die Randwerte der Spannungsfunktionen aus den gegebenen Randlasten ermitteln: wir nehmen, ausgehend von einem ihrer Punkte, die Randkurve als Integrationsweg und erhalten unter Fortlassung von Nullspannungsfunktionen

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}_{Rand}) = \int_{P_0}^{P} d\boldsymbol{K}\,, \qquad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_{Rand}) = \int_{P_0}^{P} [d\boldsymbol{M} - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \times d\boldsymbol{K}]\,; \tag{4,15}$$

diese Randwerte sind also durch die für den Aufpunkt P berechnete Dyname der zwischen P_0 und P angreifenden Randkräfte und Randmomente gegeben — man vergleiche hiermit (3,30). Wir zerlegen nun wieder nach den orthogonalen Einheitsvektoren $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{E}$:

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{K}\, ds = (L\, ds)\, \boldsymbol{n} + (T\, ds)\, \boldsymbol{t} + (Q\, ds)\, \boldsymbol{E}\,, \\ d\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}\, ds = (M_D\, ds)\, \boldsymbol{n} + (M_B\, ds)\, \boldsymbol{t} + (M_N\, ds)\, \boldsymbol{E}\,; \end{aligned}\right\} \tag{4,16}$$

darin sind, auf die Einheit der Randkurvenlänge bezogen: L die Membranlängskraft, T die Membranschubkraft, Q die Querkraft; M_D ist das Drillmoment, M_B das Biegemoment und M_N das Moment um die Schalennormale. Ebenso wie in (3,33) ergibt sich dann, bis auf belanglose Nullspannungsfunktionen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}_{Rand}) &= \int_{P_0}^{P} (L\, \boldsymbol{n} + T\, \boldsymbol{t} + Q\, \boldsymbol{E})\, ds\,, \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_{Rand}) &= \int_{P_0}^{P} \left\{ M_B\, \boldsymbol{t} - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \times \left[(L\, \boldsymbol{n} + T\, \boldsymbol{t} + Q\, \boldsymbol{E}) + \frac{\partial}{\partial s}\, (M_N\, \boldsymbol{n} - M_D\, \boldsymbol{E}) \right] \right\} ds\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,17}$$

Statisch bedeutet diese Umformung, daß bei der Berechnung der Randwerte der Spannungsfunktionen aus einem gegebenen Gleichgewichtssystem von Randlasten die Momentenanteile M_N und M_D nicht selbständig auftreten, sondern in statisch äquivalente „Zusatzkräfte" umgewandelt werden; in der Plattentheorie ($M_N \equiv 0$, $\partial \boldsymbol{E}/\partial s \equiv 0$) ist dies die „*Kirchhoff*sche Zusatz-

[1] *W. Günther*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 8 (1956) S. 111.

kraft" $Q^* = -\partial M_D/\partial s$. Ferner können wir wieder, etwa für die Randkurve, die Normalableitung $\partial\Phi/\partial n$ berechnen. Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n}\circ\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial n} &= \hat{M}_{\alpha\beta}\,n^\alpha\,n^\beta\,,\\ \boldsymbol{t}\circ\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial n} &= M_{\alpha\beta}\,n^\alpha\,t^\beta+\boldsymbol{\Omega}\circ\boldsymbol{E},\\ \boldsymbol{E}\circ\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial n} &= M_\alpha\,n^\alpha-\boldsymbol{\Omega}\circ\boldsymbol{t}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4,18}$$

bzw. in dyadischer Matrizenschreibweise mit

$$\mathfrak{M} = M_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}^\alpha\,\boldsymbol{a}^\beta + M_\alpha\,\boldsymbol{a}^\alpha\,\boldsymbol{E}: \tag{4,19}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial n} = \boldsymbol{n}\circ\mathfrak{M}+\boldsymbol{\Omega}\circ\mathfrak{T}\,, \tag{4,20}$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ aus (4,17) zu entnehmen ist. Hierzu vergleiche man die Formeln (3,35) bis (3,37).

Unser nächster Schritt besteht darin, die Kraftbeanspruchungen $\boldsymbol{K}_i$ (4,6) durch

$$\boldsymbol{N}^i = e^{i\alpha}\boldsymbol{K}_\alpha\,,\qquad \boldsymbol{K}_i = e_{\alpha i}\,\boldsymbol{N}^\alpha\,, \tag{4,21}$$

in den Maßzahlen:

$$\left.\begin{aligned} N^{il} &= e^{i\alpha}\,K_\alpha{}^l\,, & K_i{}^l &= e_{\alpha i}\,N^{\alpha l}\,,\\ N^i &= e^{i\alpha}\,K_\alpha\,; & K_i &= e_{\alpha i}\,N^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4,22}$$

entsprechend (3,43) zu transformieren. Damit haben wir die in der Schalentheorie gebräuchlichen Schalenkräfte N^{il} (Membranbeanspruchungen) und N^i (Querkräfte) eingeführt. Wir erhalten dann die folgenden statischen Gleichungen, die den kinematischen Beziehungen (3,47) bis (3,52) entsprechen und mit ihnen zusammen zu unserem System analoger Schalengleichungen gehören:

$$\boldsymbol{N}^i = e^{i\alpha}\,\nabla_\alpha\boldsymbol{\Omega}\,,\qquad \boldsymbol{M}_i = \nabla_i\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{\Omega} \tag{4,23}^*$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} N^{il} &= e^{i\alpha}\,(\nabla_\alpha\,\Omega^l - b_\alpha^l\,\Omega)\,,\\ N^i &= e^{i\alpha}\,(\nabla_\alpha\,\Omega+b_{\alpha\beta}\,\Omega^\beta)\,; \end{aligned}\right\} \tag{4,24}^*$$

$$\left.\begin{aligned} M_{il} &= \nabla_{\alpha i}\,\Phi_l - b_{il}\,\Phi - e_{il}\,\Omega\,,\\ M_i &= \nabla_l\,\Phi+b_i^\alpha\,\Phi_\alpha+e_{i\alpha}\,\Omega^\alpha\,; \end{aligned}\right\} \tag{4,25}^*$$

$$\nabla_\alpha\,\boldsymbol{N}^\alpha = 0\,,\qquad e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\,\boldsymbol{M}_\beta+\boldsymbol{a}_\alpha\times\boldsymbol{N}^\alpha\,; \tag{4,26}^*$$

in den Maßzahlen:

$$\nabla_\alpha\,N^{\alpha l} - b_\alpha^l\,N^\alpha = 0\,,\qquad \nabla_\alpha\,N^\alpha + b_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta} = 0\,; \tag{4,27}^*$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\alpha\beta}\,[\nabla_\alpha\,M_{\beta l} - b_{\alpha l}\,M_\beta] - e_{\alpha l}\,N^\alpha &= 0\,,\\ e^{\alpha\beta}\,[\nabla_\alpha\,M_\beta + b_\alpha^\lambda\,M_{\beta\lambda}] + e_{\alpha\beta}\,\overset{\times}{N}_{\alpha\beta} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,28}^*$$

Die erste der Gleichungen (4,28) kann nach den Querkräften N^l aufgelöst werden:

$$N^l = e^{l\lambda}\,e^{\alpha\beta}\,[\nabla_\alpha\,M^{\beta\lambda} - b_{\alpha\lambda}\,M_\beta]\,, \tag{4,29}^*$$

diese Größen sind daher im Gleichgewichtsfalle bereits durch die Momente $\boldsymbol{M}_i$ festgelegt und können, wenn es gewünscht wird, ganz aus den Gleichgewichtsbedingungen eliminiert werden.

Für den endgültigen Anschluß an die konventionelle Darstellung der Schalentheorie (in der Analogien nur noch schwach erkennbar sind) rechnen wir auch noch die Schalenmomente $\boldsymbol{M}_i$ auf neue Momente $\boldsymbol{m}^i$ um [vgl. (3,44)]:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{m}^i &= e^{i\alpha}\,[\boldsymbol{M}_\alpha\times\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{M}_\alpha\circ\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E}]\,,\\ \boldsymbol{M}_i &= e_{\alpha i}\,[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{m}^\alpha+(\boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{m}^\alpha)\,\boldsymbol{E}] \end{aligned}\right\} \tag{4,30}$$

in den Maßzahlen

$$\left.\begin{aligned} m^{il} &= \boldsymbol{m}^i\circ\boldsymbol{a}^l = e^{i\alpha}\,e^{l\beta}\,M_{\alpha\beta}\,,\\ m^i &= \boldsymbol{m}^i\circ\boldsymbol{E} = e^{i\alpha}\,M_\alpha\,;\\ M_{il} &= \boldsymbol{M}_i\circ\boldsymbol{a}_l = e_{\alpha i}\,e_{\beta l}\,m^{\alpha\beta}\,,\\ M_i &= \boldsymbol{M}_i\circ\boldsymbol{E} = e_{\alpha i}\,M^\alpha\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,31}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (4,26) verwandeln sich dann in

$$\nabla_\alpha N^{\alpha l} - b^l_\alpha N^\alpha = 0\,, \qquad \nabla_\alpha N^\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} = 0\,; \tag{4,32}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\alpha m^{\alpha l} - N^l + e^{\alpha l} b_{\alpha\beta} m^\beta = 0\,, \\ \nabla_\alpha m^\alpha + e_{\alpha\beta} [N^{\alpha\beta} + b^\beta_\lambda m^{\lambda\alpha}] = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{4,33}$$

wie sie, ohne die Momente m^i, z. B. bei *Green* und *Zerna* angegeben sind. Die Abb. 4 und 5 zeigen schematisch die gegenseitige Zuordnung der in diesem Abschnitt definierten Beanspruchungsgrößen.

Schließlich geben wir noch zwei leicht zu verifizierende Formen der negativen virtuellen Arbeit der Beanspruchungsgrößen an:

$$\left.\begin{aligned} -\delta A^{(i)} = \iint (\boldsymbol{N}^\alpha \circ \delta\boldsymbol{\epsilon}_\alpha - \boldsymbol{M}_\alpha \circ \delta\boldsymbol{\varkappa}^\alpha)\, df\,, \\ -\delta A^{(i)} = \iint (\boldsymbol{N}^\alpha \circ \delta\boldsymbol{\epsilon}_\alpha + \boldsymbol{m}^\alpha \circ \delta\boldsymbol{\rho}_\alpha)\, df\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,34}$$

Auch über diese Ausdrücke hätten wir natürlich zu den entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen gelangen können.

5. Einbettungstheorie: Geometrie, Statik, Kinematik. Die bisher gefundenen Gleichungen erfassen noch nicht das ganze Schalenproblem; sie müssen durch ein Stoffgesetz ergänzt werden. Ein solches Stoffgesetz kennen wir aber nur für das räumliche Punktkontinuum, nämlich — im inear-elastischen Fall — das *Hooke*sche Gesetz. Wir müssen daher die räumlichen Deformationen durch die der Mittelfläche ausdrücken, und die räumlichen Spannungen zu den Beanspruchungsgrößen zusammenfassen, was nur für dünne Schalen sinnvoll ist. Dazu führen wir eine Koordinate $q^{(3)} = z$ senkrecht zur Schalenmittelfläche ein und ordnen jedem Punkte des Schalenraumes den Ortsvektor

$$\boldsymbol{R}(q^{(1)}, q^{(2)}; z) = \boldsymbol{r}(q^{(1)}, q^{(2)}) + z\,\boldsymbol{E}(q^{(1)}, q^{(2)})\,, \qquad -\frac{t}{2} \leqq z \leqq +\frac{t}{2}\,. \tag{5,1}$$

zu (wir übernehmen wieder die von *Green* und *Zerna* verwendeten Bezeichnungen). Die Maßvektoren dieses räumlichen Koordinatensystems (die Indizes $i, l, \ldots; \alpha, \beta, \ldots$ nehmen wie bisher die Werte 1 und 2 an) sind

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i = \partial_i \boldsymbol{R} = \partial_i \boldsymbol{r} + z\,\partial_i \boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_i - z\,\boldsymbol{b}_i\,, \\ \boldsymbol{g}_3 = \partial_3 \boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}\,, \end{aligned}\right\} \tag{5,2}$$

woraus sich für den kovarianten räumlichen Maßtensor ergibt

$$\left.\begin{aligned} g_{il} = \boldsymbol{g}_i \circ \boldsymbol{g}_l = a_{il} - 2\,z\,b_{il} + z^2 c_{il} = \hat{g}_{il}\,, \\ g_{i3} = \boldsymbol{g}_i \circ \boldsymbol{E} = 0\,, \\ g_{33} = \boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{E} = 1\,. \end{aligned}\right\} \tag{5,3}$$

Die kontravarianten räumlichen Maßvektoren $\boldsymbol{g}^l$ werden, als die Lösungen der Gleichungen

$$\boldsymbol{g}^l \circ \boldsymbol{g}_i = \delta^l_i\,, \tag{5,4}$$

Potenzreihen in z:

$$\boldsymbol{g}^l = \boldsymbol{a}^l + z\,\boldsymbol{b}^l + z^2 b^l_\alpha\, \boldsymbol{b}^\alpha + \ldots\,; \tag{5,5}$$

ferner ist

$$\boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{E}\,, \tag{5,6}$$

so daß der kontravariante räumliche Maßtensor die Maßzahlen

$$\left.\begin{aligned} g^{il} = \boldsymbol{g}^i \circ \boldsymbol{g}^l = a^{il} + 2\,z\,b^{il} + 3\,z^2 c^{il} + \ldots\,, \\ g^{i3} = \boldsymbol{g}^i \circ \boldsymbol{E} = 0\,, \\ g^{33} = \boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{E} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5,7}$$

erhält.

Ist

$$g = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 \tag{5,8}$$

die Determinante des räumlichen Maßtensors, so gilt

$$h = \sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2\,H\,z + K\,z^2 \ldots ; \tag{5,9}$$

h ist das Verhältnis des Inhaltes

$$df(q^{(1)}, q^{(2)}; z) = (\boldsymbol{g}_1\,dq^1 \times \boldsymbol{g}_2\,dq^2) \circ \boldsymbol{E} \tag{5,10}$$

eines zur Mittelfläche parallelen Flächenelementes zum Inhalt

$$df(q^{(1)}, q^{(2)}; 0) = (\boldsymbol{a}_1\,dq^1 \times \boldsymbol{a}_2\,dq^2) \circ \boldsymbol{E} \tag{5,11}$$

des entsprechenden Elementes der Mittelfläche.

Wir beginnen nun mit der angekündigten Reduktion und fassen zunächst die räumlichen Spannungen τ^{il}, τ^{i3} (wir nehmen an, daß τ^{33} überall verschwindet) zu den Beanspruchungsgrößen der Schale zusammen: Die an einem Element $\overset{l}{df} = \sqrt{g_{ii}}\,dq^i\,dz$ $(i \neq l)$ angreifende Schnittkraft ist

$$\overset{l}{d\boldsymbol{K}} = (\tau^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{g}_\beta + \tau^{\alpha 3}\,\boldsymbol{E})\,\overset{l}{n}_\alpha\,\overset{l}{df} ; \tag{5,12}$$

darin ist

$$\overset{l}{n}_\alpha = \overset{l}{\boldsymbol{n}} \circ \boldsymbol{g}_\alpha$$

die räumliche (!) Zerlegung des in den Schnitt hineinweisenden Normaleneinheitsvektors $\overset{l}{n}$ der Fläche $\overset{l}{df}$:

$$\overset{1}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{g}^1}{\sqrt{g^{11}}} = \frac{\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^1}{\sqrt{g_{22}}}, \qquad \overset{2}{\boldsymbol{n}} = -\frac{\boldsymbol{g}^2}{\sqrt{g^{22}}} = -\frac{\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^2}{\sqrt{g_{11}}}, \tag{5,13}$$

was sich zu

$$\overset{l}{n}_\alpha = \frac{e_{\lambda i}}{\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{g}\,g^\lambda}{\sqrt{g_{ii}}} = e_{\lambda i}\,h\,\frac{g^\lambda}{\sqrt{g_{ii}}} \qquad (i \neq l) \tag{5,14}$$

zusammenfassen läßt. Daher wird

$$\overset{l}{n}_\alpha = e_{\alpha i}\,h \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{5,15}$$

und

$$\overset{l}{d\boldsymbol{K}} = e_{\alpha i}\,(h\,\tau^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{g}_\beta + h\,\tau^{\alpha 3}\,\boldsymbol{E})\,dq^i\,dz . \tag{5,16}$$

Wir definieren mit *Green* und *Zerna* durch

$$\tau^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{g}_\beta = \sigma^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}_\beta , \qquad \sigma^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\lambda}\,\boldsymbol{g}_\lambda \circ \boldsymbol{a}^\beta = \tau^{\alpha\beta} - z\,b^\beta_\lambda\,\tau^{\alpha\lambda} \tag{5,17}$$

einen (i. a. nicht symmetrischen) „reduzierten Spannungstensor" σ^{il}; dann wird

$$\overset{l}{d\boldsymbol{K}} = e_{\alpha i}\,(h\,\sigma^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}_\beta + h\,\tau^{\alpha 3}\,\boldsymbol{E})\,dq^i\,dz . \tag{5,18}$$

Nach (4,5) ist am Schnittelement

$$\overset{i}{ds} = \sqrt{a_{ii}}\,dq^i \tag{5,19}$$

der Mittelfläche

$$\boldsymbol{K}_i\,dq^i = \int\limits_{(z)} \overset{l}{d\boldsymbol{K}} \qquad (i \neq l) , \tag{5,20}$$

also

$$\boldsymbol{K}_i = e_{\alpha i}\Big(\int\limits_{(z)} h\,\sigma^{\alpha\beta}\,dz\Big)\,\boldsymbol{a}_\beta + e_{\alpha i}\Big(\int\limits_{(z)} h\,\tau^{\alpha 3}\,dz\Big)\,\boldsymbol{E} . \tag{5,21}$$

Durch Vergleich mit (4,6), (4,21) kommt

$$\boldsymbol{N}^i = \Big(\int\limits_{(z)} h\,\sigma^{i\alpha}\,dz\Big)\,\boldsymbol{a}_\alpha + \Big(\int\limits_{(z)} h\,\tau^{i3}\,dz\Big)\,\boldsymbol{E} ; \tag{5,22}$$

in den Maßzahlen:

$$N^{il} = \int\limits_{(z)} h\,\sigma^{il}\,dz , \qquad N^i = \int\limits_{(z)} h\,\tau^{i3}\,dz . \tag{5,23}$$

Ähnlich findet man

$$d\overset{l}{\boldsymbol{M}} = z\,\boldsymbol{E} \times d\overset{l}{\boldsymbol{K}} = e_{i\alpha}\, e_{\lambda\beta}\, z\, h\, \sigma^{\alpha\beta}\, \boldsymbol{a}^{\lambda}\, dq^{i}\, dz \qquad (i \neq l)\,; \tag{5,24}$$

mit

$$\boldsymbol{M}_i\, dq^{i} = \int_{(z)} d\overset{l}{\boldsymbol{M}} \qquad (i \neq l) \tag{5,25}$$

folgt dann

$$\boldsymbol{M}_i = e_{i\alpha}\, e_{\lambda\beta} \Big(\int_{(z)} z\, h\, \sigma^{\alpha\beta}\, dz \Big)\, \boldsymbol{a}^{\lambda}\,, \tag{5,26}$$

in den Maßzahlen:

$$M_{il} = e_{i\alpha}\, e_{l\beta} \int_{(z)} z\, h\, \sigma^{\alpha\beta}\, dz\,, \qquad M_i = 0\,. \tag{5,27}$$

Vergleicht man dies mit (4,31), so erhält man für den konventionellen, nach den Spannungen indizierten Momententensor

$$m^{il} = \int_{(z)} z\, h\, \sigma^{il}\, dz\,. \tag{5,28}$$

Die Momente M_i um die Schalennormale verschwinden in dieser, von den (nicht-singulären!) Spannungen des räumlichen Punktkontinuums hergeleiteten Beanspruchungstheorie, ebenso natürlich die ihnen äquivalenten Momente m^i. Dann entartet die zweite der Gleichgewichtsbedingungen (4,28) in eine algebraische Beziehung:

$$e_{\alpha\beta}\, N^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}\, b_{\beta}^{\lambda}\, M_{\alpha\lambda}\,, \tag{5,29}^{*}$$

die zweite der Gleichgewichtsbedingungen (4,33) in die bekannte Gleichung

$$2\,\overset{\times}{N}{}^{il} = N^{il} - N^{li} = b_{\alpha}^{i}\, m^{\alpha l} - b_{\alpha}^{l}\, m^{\alpha i}\,. \tag{5,30}$$

Ferner verlieren jetzt die Flächenkomponenten Ω^i der Spannungsfunktion $\boldsymbol{\Omega}$ ihre Selbständigkeit; denn nach (4,12) werden sie von der Spannungsfunktion $\boldsymbol{\Phi}$ abhängig:

$$\Omega^{i} = e^{i\alpha} [\nabla_{\alpha} \boldsymbol{\Phi} + b_{\alpha}^{\beta}\, \boldsymbol{\Phi}_{\beta}]\,, \tag{5,31}^{*}$$

und daraus, für eine Flächenkurve mit dem zugehörigen Dreibein $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{\Omega} \circ \boldsymbol{t} = -\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{n}} \circ \boldsymbol{E}\,, \tag{5,32}^{*}$$

was auch aus (4,18) entnommen werden kann.

Schließlich geht (4,29) mit (4,31) in die Gleichung

$$N^{l} = e^{l\lambda}\, e^{\alpha\beta}\, \nabla_{\alpha} M_{\beta\lambda} = \nabla_{\alpha}\, m^{\alpha l} \tag{5,33}^{*}$$

über, die formal mit der entsprechenden Plattengleichung übereinstimmt.

Wir wenden uns nun den räumlichen Deformationen zu, die wir unter der Voraussetzung auf die Deformationen der Schalenmittelfläche zurückführen wollen, daß deren Querschubanteile ε_i verschwinden (diese Annahme ist nur erforderlich, um die Analogie zur Gleichung (5,27) herzustellen), womit die Querkräfte N^i zu Reaktionskräften werden. Aus $\varepsilon_i = 0$ folgt zunächst, wie wir ohne weitere Rechnung von den entsprechenden statischen Gleichungen her übernehmen können,

$$e_{\alpha\beta}\, \overset{\times}{\varkappa}{}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}\, b_{\beta}^{\lambda}\, \varepsilon_{\alpha\lambda}\,; \tag{5,34}^{*}$$

diese algebraische Verträglichkeitsbedingung entspricht der algebraischen Gleichgewichtsbedingung (5,29); ferner wird, analog zu (5,31),

$$\omega^{i} = e^{i\alpha}\, [\nabla_{\alpha}\, v + b_{\alpha}^{\beta}\, v_{\beta}]\,; \tag{5,35}^{*}$$

die Drehungen um die Tangenten an die Koordinatenlinien der Mittelfläche werden also vom Verschiebungsvektor $\boldsymbol{v}$ abhängig. Formal mit (5,32) übereinstimmend wird für eine Flächenkurve

$$\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{t} = -\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} \circ \boldsymbol{E}\,. \tag{5,36}^{*}$$

Der statischen Beziehung (5,33) entspricht auf der kinematischen Seite

$$\varkappa^{l} = e^{l\lambda}\, e^{\alpha\beta}\, \nabla_{\alpha}\, \varepsilon_{\beta\lambda}\,, \tag{5,37}^{*}$$

und der in (3,56) eingeführte symmetrische Verkrümmungstensor $\tilde{\varrho}_{il}$ reduziert sich schließlich auf

$$\tilde{\varrho}_{il} = \varrho_{il} - b_i^\alpha \varepsilon_{l\alpha} ; \tag{5,38}$$

daraus folgt

$$2 \overset{\times}{\varrho}_{il} = \varrho_{il} - \varrho_{li} = b_i^\alpha \varepsilon_{l\alpha} - b_l^\alpha \varepsilon_{i\alpha} \tag{5,39}$$

[was man mit (5,30) vergleichen möge], und

$$\tilde{\varrho}_{il} = \hat{\varrho}_{il} - \frac{1}{2}(b_i^\alpha \varepsilon_{l\alpha} + b_l^\alpha \varepsilon_{i\alpha}) . \tag{5,40}$$

Die räumlichen Deformationen γ_{il} sind nun durch

$$\gamma_{il} = \hat{\gamma}_{il} = \frac{1}{2}(g'_{il} - g_{il}) \tag{5,41}$$

definiert, wobei g'_{il} der räumliche Maßtensor nach der Deformation ist. Zusammen mit (5,3) liefert das

$$\gamma_{il} = \frac{1}{2}(a'_{il} - a_{il}) - z(b'_{il} - b_{il}) + z^2 \cdot \frac{1}{2}(c'_{il} - c_{il}) . \tag{5,42}$$

Greifen wir auf (3,16) und (3,60) zurück, so entsteht zunächst

$$\gamma_{il} = \hat{\varepsilon}_{il} + z\,\tilde{\varrho}_{il} + z^2 \cdot \frac{1}{2}(c'_{il} - c_{il}) . \tag{5,43}$$

Nun ist

$$c'_{il} = b_i^{\beta'} b'_{l\beta} = a^{\alpha\beta'} b'_{i\alpha} b'_{l\beta} = (a^{\alpha\beta} - 2\,\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta})(b_{i\alpha} - \tilde{\varrho}_{i\alpha})(b_{l\beta} - \tilde{\varrho}_{l\beta}) , \tag{5,44}$$

wobei (3,19) verwendet wurde; näherungsweise wird daher, auf Grund von (5,38)

$$c'_{il} - c_{il} = -(b_i^\alpha \varrho_{l\alpha} + b_l^\alpha \varrho_{i\alpha}) , \tag{5,45}$$

also

$$\gamma_{il} = \hat{\varepsilon}_{il} + z\,\tilde{\varrho}_{il} - z^2 \cdot \frac{1}{2}(b_i^\alpha \varrho_{l\alpha} + b_l^\alpha \varrho_{i\alpha}) . \tag{5,46}$$

Die gewogenen Mittelwerte von γ_{il} werden

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{il} &= \frac{1}{t}\int_{(z)} \gamma_{il}\,dz = \hat{\varepsilon}_{il} - \frac{t^2}{12} \cdot \frac{1}{2}(b_i^\alpha \varrho_{l\alpha} + b_l^\alpha \varrho_{i\alpha}) , \\ \tilde{\varrho}_{il} &= \frac{12}{t^3}\int_{(z)} z\,\gamma_{il}\,dz = \hat{\varrho}_{il} - \frac{1}{2}(b_i^\alpha \varepsilon_{l\alpha} + b_l^\alpha \varepsilon_{i\alpha}) . \end{aligned}\right\} \tag{5,47}$$

Dieses Ergebnis legt es, im Hinblick auf (5,39) und (5,40), nahe, für den unsymmetrischen Teil $\overset{\times}{\varepsilon}_{il}$ des Tensors ε_{il} anzusetzen

$$2 \overset{\times}{\varepsilon}_{il} = \varepsilon_{il} - \varepsilon_{li} = \frac{t^2}{12}(b_i^\alpha \varrho_{l\alpha} - b_l^\alpha \varrho_{i\alpha}) \tag{5,48}$$

bzw. in $\varkappa^i$ geschrieben

$$e^{\alpha\beta} \overset{\times}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{t^2}{12} e_{\alpha\beta} b_\lambda^\alpha \varkappa^{\lambda\beta} , \tag{5,49}^*$$

vorausgesetzt, daß wir uns mit dieser Annahme nicht in einen Widerspruch zum Elastizitätsgesetz begeben, das wir erst noch aufstellen wollen. Das ist, wie sich zeigen wird, nicht der Fall. Mit der Annahme (5,49) wird jetzt auch noch die Drehung ω um die Schalennormale abhängig vom Verschiebungsvektor $\boldsymbol{v}$; eine längere Rechnung zeigt, daß

$$\omega = \frac{1}{1 - \frac{t^2}{12} K} \circ \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left[v_\beta - \frac{t^2}{12} b_\beta^\lambda (\nabla_\lambda v + b_\lambda^\mu v_\mu) \right] \tag{5,50}$$

wird. Für dünne Schalen ist es stets zulässig, Größen von der Form $t \cdot b_l^i$ als so klein gegen 1 anzusehen, daß man sie höchstens in der ersten Potenz mitzunehmen braucht. Dann wird

$$\omega \approx \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left(v_\beta - \frac{t^2}{12} b_\beta^\lambda \nabla_\lambda v \right) . \tag{5,51}$$

Einfacher und für praktische Rechnungen auch wohl in der Regel erforderlich ist es anzunehmen, daß der Tensor ε_{il} symmetrisch ist:

$$\varepsilon_{il} = \hat{\varepsilon}_{il} \text{ bzw. } \overset{x}{\varepsilon}_{il} = 0 . \tag{5,52}$$

Dies führt sofort auf

$$\omega = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta ; \tag{5,53}$$

ω wird zur „mittleren Drehung", die in den Membrandeformationen steckt. Mit $\varepsilon_i = 0$ und (5,52) entartet dann unser *Cosserat*sches Kontinuum endgültig zum gewöhnlichen Punktkontinuum, in dem nur noch dem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{v}$ selbständige Bedeutung zukommt.

Für die räumlichen Schubdeformationen γ_{i3} finden wir gemäß (3,26) leicht

$$\gamma_{i3} = \varepsilon_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha \circ \boldsymbol{g}_i . \tag{5,54}$$

Sie verschwinden also gleichzeitig mit den ε_i. Schließlich folgt mit (3,26), daß die Deformation

$$\gamma_{33} = \boldsymbol{g}_3' \circ \boldsymbol{g}_3' - 1 \tag{5,55}$$

in unserem Modell ebenfalls verschwindet.

6. Die vollständigen Schalengleichungen. Das Elastizitätsgesetz des isotropen Werkstoffes im linear-elastischen Bereich lautet

$$\tau^{il} = \frac{E}{1-\nu^2} \left((1-\nu)\, g^{i\alpha}\, g^{l\beta} + \nu\, g^{\alpha\beta}\, g^{il}\right) \gamma_{\alpha\beta} , \tag{6,1}$$

wenn wir, wie üblich, einen ebenen Spannungszustand voraussetzen, also darüber hinwegsehen, daß dazu die kinematische Gleichung $\gamma_{33} = 0$ im Widerspruch steht. Aus (6,1) gewinnen wir mit (5,17) leicht für den reduzierten Spannungstensor σ^{il} die Formel

$$h\,\sigma^{il} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)\, g^{i\alpha}\, (h\, \boldsymbol{g}^\beta \circ \boldsymbol{a}^l) + \nu\, g^{\alpha\beta}\, (h\, \boldsymbol{g}^i \circ \boldsymbol{a}^l)\right] \gamma_{\alpha\beta} , \tag{6,2}$$

in der wir nun rechts alles nach Potenzen von z entwickeln und wieder Glieder von der Form $z\, b_i^l$ nur bis zur ersten Potenz mitnehmen. Man bemerkt dann, daß die Unsymmetrie (5,48) des Tensors ε_{il} der Membrandeformationen von dieser Näherung nicht mehr erfaßt wird, so daß dieser als symmetrisch angenommen werden kann. Nach Integration gemäß (5,23) und (5,28) über die Schalendicke t stellen die folgenden Gleichungen das Stoffgesetz der Schale dar:

$$N^{il} = \frac{1-\nu^2}{E\,t} \left\{(1-\nu)\, a^{i\alpha}\, a^{l\beta} \left[\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{12}\left(\frac{3}{2}\, b_\alpha^\lambda\, \varrho_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\, b_\beta^\lambda\, \varrho_{\lambda\alpha} - 2\, H\, \varrho_{\alpha\beta}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \nu \left[a^{il}\, \varepsilon + \frac{t^2}{12} \left[a^{il}\, b^{\alpha\beta}\, \varrho_{\alpha\beta} + b^{il}\, \varrho - 2\, H\, a^{il}\, \varrho)\right]\right]\right\} , \tag{6,3}$$

$$m^{il} = \frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)} \left\{(1-\nu)\, a^{i\alpha}\, a^{l\beta} \left[\varrho_{\alpha\beta} + (b_\alpha^\lambda\, \hat{\varepsilon}_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda\, \hat{\varepsilon}_{\lambda\alpha} - 2\, H\, \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta})\right]\right.$$
$$\left. + \nu \left[a^{il}\, \varrho + (a^{il}\, b^{\alpha\beta}\, \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + b^{il}\, \varepsilon - 2\, H\, a^{il}\, \varepsilon)\right]\right\} \tag{6,4}$$

mit

$$\varepsilon = a^{\alpha\beta}\, \varepsilon_{\alpha\beta} , \qquad \varrho = a^{\alpha\beta}\, \varrho_{\alpha\beta} . \tag{6,5}$$

Weil nun nach (5,30) der antimetrische Teil des Längskrafttensors bereits durch die Schalenmomente gegeben sind, bilden wir von (6,3) den symmetrischen Teil

$$\hat{N}^{il} = \frac{E\,t}{1-\nu^2} \left\{(1-\nu)\, a^{i\alpha}\, a^{l\beta} \left[\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{12} (b_\alpha^\lambda\, \varrho_{\lambda\beta} + b_\beta^\lambda\, \varrho_{\lambda\alpha} - 2\, H\, \varrho_{\alpha\beta})\right.\right.$$
$$\left.\left. + \nu \left[a^{il}\, \varepsilon + \frac{t^2}{12} (a^{il}\, b^{\alpha\beta}\, \varrho_{\alpha\beta} + b^{il}\, \varrho - 2\, H\, a^{il}\, \varrho)\right]\right\} . \tag{6,6}$$

Führen wir daher die geometrischen Tensoren

$$P^{il,rs} = P^{\widehat{il},rs} = (b^{ir} - H\, a^{ir})\, a^{ls} + (b^{lr} - H\, a^{lr})\, a^{is} = \overset{\bullet}{b}{}^{ir}\, a^{ls} + \overset{\bullet}{b}{}^{lr}\, a^{is} \tag{6,7}$$

und

$$Q^{il,rs} = Q^{\widehat{il},\widehat{rs}} = (b^{il} - H\, a^{il})\, a^{rs} + (b^{rs} - H\, a^{rs})\, a^{il} = \overset{\bullet}{b}{}^{il}\, a^{rs} + \overset{\bullet}{b}{}^{rs}\, a^{il} \tag{6,8}$$

in, so wird

$$\hat{N}^{il} = \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left\{(1-\nu)\left[a^{i\alpha}\,a^{l\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{12}\,P^{il,\alpha\beta}\,\varrho_{\alpha\beta}\right] + \nu\left[a^{il}\,\varepsilon + \frac{t^2}{12}\,Q^{il,\alpha\beta}\,\varrho_{\alpha\beta}\right]\right\}, \tag{6,9}$$

$$m^{il} = \frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)}\left\{(1-\nu)\left[a^{i\alpha}\,a^{l\beta}\,\varrho_{\alpha\beta} + P^{il,\alpha\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right] + \nu\left[a^{il}\,\varrho + Q^{il,\alpha\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right]\right\}. \tag{6,10}$$

Man beachte, daß der soeben eingeführte Tensor $\overset{\bullet}{b}{}^{il}$ der Deviator des zweiten Haupttensors ist, in den Koordinaten der Hauptkrümmungslinien:

$$\overset{\bullet}{b}{}^{11} = a^{11}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right), \qquad \overset{\bullet}{b}{}^{22} = a^{22}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right), \qquad \overset{\bullet}{b}{}^{12} = \overset{\bullet}{b}{}^{21} = 0\,. \tag{6,11}$$

Von (6,9), (6,10) her läßt sich das Problem der Umkehrung des Stoffgesetzes leicht lösen. Wie man durch Einsetzen bestätigen kann, wird nämlich, im Rahmen unserer Vernachlässigungen

$$\varrho_{il} = \frac{12}{E\,t^3}\left\{(1+\nu)\left[a_{i\alpha}\,a_{l\beta}\,m^{\ \beta} - \frac{t^2}{12}\,P_{il,\alpha\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta}\right] - \nu\left[a_{il}\,m - \frac{t^2}{12}\,Q_{il\ \alpha\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta}\right]\right\}, \tag{6,12}$$

$$\hat{\varepsilon}_{il} = \frac{1}{E\,t}\left\{(1+\nu)\,[a_{i\alpha}\,a_{l\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta} - P_{il,\alpha\beta}\,m^{\alpha\beta}] - \nu\,[a_{il}\,N - Q_{il,\alpha\beta}\,m^{\alpha\beta}]\right\}, \tag{6,13}$$

mit

$$m = a_{\alpha\beta}\,m^{\alpha\beta}\,, \qquad N = a_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta}\,. \tag{6,14}$$

Hier möge eine Bemerkung über die Unsymmetrie des Momententensors m^{il} eingeschaltet werden: Nach (6,10) ist

$$2\overset{\times}{m}{}^{il} = m^{il} - m^{li} = \frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)}\,(1-\nu)\,a^{i\alpha}\,a^{l\beta}\,(\varrho_{\alpha\beta} - \varrho_{\beta\alpha}); \tag{6,15}$$

wegen der algebraischen Verträglichkeitsbedingung (5,39) wird daraus nach (6,13), unter Beachtung von (5,30)

$$m^{il} - m^{li} = \frac{t^2}{12}\left(b^i_\alpha\,N^{\alpha l} - b^l_\alpha\,N^{\alpha i}\right), \tag{6,16}$$

womit die Analogie sowohl zur algebraischen Gleichgewichtsbedingung (5,30) als auch zu den kinematischen Gleichungen (5,39) und (5,48) hergestellt ist. Durch (6,16) wird dann auch der Skalarteil der Spannungsfunktion $\mathfrak{Q}$ festgelegt: in Analogie zu (5,51) wird

$$\Omega = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\left(\Phi_\beta - \frac{t^2}{12}\,b^\lambda_\beta\,\nabla_\lambda\Phi\right); \tag{6,17}$$

zusammen mit (5,31) ist nunmehr $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{F}$ völlig bestimmt. Man erkennt: Um die Symmetrieverhältnisse des Momententensors beurteilen zu können, müssen das Elastizitätsgesetz und eine Verträglichkeitsbedingung herangezogen werden. Bei der ebenen Platte verwischen sich diese Zusammenhänge: die Symmetrie des Momententensors kann dort allein aus der Symmetrie der räumlichen Schubspannungen erschlossen werden, die allerdings ihrerseits nur aus der speziellen Kinematik des räumlichen Punktkontinuums heraus begründet werden kann. (In einem etwas anderen Zusammenhang hat *D. Rüdiger*[1] die Unsymmetrie des Momententensors erörtert.) Die übliche Vernachlässigung

$$\overset{\times}{m}{}^{il} = 0 \tag{6,18}$$

entspricht der Annahme (4,52). Sie hat für den Skalarteil von Ω die Gleichung

$$\Omega = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta}\,\nabla_\alpha\,\Phi_\beta \tag{6,19}$$

zur Folge, in Analogie zu (5,53).

Wir fahren in der Behandlung der Elastizitätsgleichungen fort und rechnen sie auf die Momente M_{il} und die Verkrümmungen $\varkappa^{il}$ um, wobei wir uns die Einzelheiten der Rechnung ersparen

[1] *D. Rüdiger*, Ing.-Arch. 28 (1959) S. 281.

wollen. Mit den geometrischen Tensoren

$$\left.\begin{aligned} U^{il}_{\cdot\cdot rs} &= \delta^i_r \overset{\bullet}{b}{}^l_s + \delta^l_r \overset{\bullet}{b}{}^i_s - 2\,\overset{\bullet}{b}{}^{il}\, a_{rs}, \\ V^{il}_{\cdot\cdot rs} &= a^{il}\,\overset{\bullet}{b}_{rs} - \overset{\bullet}{b}{}^{il}\, a_{rs}; \\ \widetilde{U}^{il}_{\cdot\cdot rs} &= \overset{\bullet}{b}{}^i_r\,\delta^l_s + \overset{\bullet}{b}{}^l_r\,\delta^i_s - 2\,a^{il}\,\overset{\bullet}{b}_{rs}, \\ \widetilde{V}^{il}_{\cdot\cdot rs} &= \overset{\bullet}{b}{}^{il}\, a_{rs} - a^{il}\,\overset{\bullet}{b}_{rs} = -\,V^{il}_{\cdot\cdot rs}, \end{aligned}\right\} \tag{6,20}$$

so daß also, wenn wir symbolisch die Matrizen

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overset{\bullet}{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \overset{\bullet}{b}{}^1_1 & \overset{\bullet}{b}{}^2_1 \\ \overset{\bullet}{b}{}^1_2 & \overset{\bullet}{b}{}^2_2 \end{pmatrix} \tag{6,21}$$

der gemischten Formen des ersten Haupttensors und des Deviators des zweiten Haupttensors einführen, die Dualitäten

$$\widetilde{U}^{il}_{\cdot\cdot rs}(\mathfrak{D},\mathfrak{B}) = U^{il}_{\cdot\cdot rs}(\mathfrak{B},\mathfrak{D}), \qquad \widetilde{V}^{il}_{\cdot\cdot rs}(\mathfrak{D},\mathfrak{B}) = V^{il}_{\cdot\cdot rs}(\mathfrak{B},\mathfrak{D}) \tag{6,22}$$

bestehen, lautet jetzt das Elastizitätsgesetz:

$$\left.\begin{aligned} \hat{N}^{il} &= \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\left(a^{i\alpha}\,a^{l\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{12}\,U^{\cdot\cdot\,l}_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta}\right) + \nu\left(a^{il}\,\varepsilon + \frac{t^2}{12}\,V^{\cdot\cdot\,l}_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta}\right)\right], \\ M_{il} &= -\frac{E\,t^3}{12(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\,(a_{i\alpha}\,a_{l\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta} + \widetilde{U}^{\alpha\beta}_{il\,\cdot\cdot}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}) + \nu\,(a_{il}\,\varkappa + V_{il\,\cdot\cdot}^{\;\alpha\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta})\right]; \end{aligned}\right\} \tag{6,23}^{\bullet}$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^{il} &= -\frac{12}{E\,t^3}\left[(1+\nu)\left(a^{i\alpha}\,a^{l\beta}\,M_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{12}\,\widetilde{U}^{il}_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta}\right) - \nu\left(a_{il}\,M + \frac{t^2}{12}\,\widetilde{V}^{il}_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta}\right)\right], \\ \hat{\varepsilon}_{il} &= \frac{1}{E\,t}\left[(1+\nu)\,(a_{i\alpha}\,a_{l\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta} + U_{il\,\cdot\cdot}^{\;\alpha\beta}\,M_{\alpha\beta}) - \nu\,(a_{il}\,N + V_{il\,\cdot\cdot}^{\;\alpha\beta}\,M_{\alpha\beta})\right] \end{aligned}\right\} \tag{6,24}^{\bullet}$$

mit

$$\varkappa = a_{\alpha\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta}, \qquad M = a^{\alpha\beta}\,M_{\alpha\beta}. \tag{6,25}$$

Dazu kommen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\alpha N^{\alpha l} - e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu}\,b^l_\alpha\,\nabla_\beta\,M_{\mu\lambda} &= 0, \\ e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu}\,\nabla_\alpha\nabla_\beta\,M_{\mu\lambda} + b_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta} &= 0, \\ e_{\alpha\beta}\,\overset{\times}{N}{}^{\alpha\beta} + e^{\alpha\beta}\,b^\lambda_\alpha\,M_{\beta\lambda} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6,26}^{\bullet}$$

deren Lösungen aus einer Spannungsfunktion Φ abgeleitet werden können:

$$\left.\begin{aligned} N^{il} &= e^{i\alpha}\,e^{l\beta}\,[\nabla_\alpha\nabla_\beta\,\Phi + \nabla_\alpha(b^\lambda_\beta\,\Phi_\lambda)] - \frac{1}{2}\,e^{i\alpha}\,e^{\lambda\beta}\,b^l_\alpha\,\nabla_\lambda\,\Phi_\beta, \\ M_{il} &= \frac{1}{2}\,(\nabla_i\,\Phi_l + \nabla_l\,\Phi_i) - b_{il}\,\Phi + \underline{\frac{t^2}{12}\cdot\frac{1}{2}\,(b^\alpha_l\,\nabla_i - b^\alpha_i\,\nabla_l)\,\nabla_\alpha\,\Phi}. \end{aligned}\right\} \tag{6,27}^{\bullet}$$

Das unterstrichene Glied fällt weg, wenn der Momententensor als symmetrisch angenommen wird. Ebenso leiten sich die Deformationen, welche den Verträglichkeitsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\alpha\,\varkappa^{\alpha l} - e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu}\,b^l_\alpha\,\nabla_\beta\,\varepsilon_{\mu\lambda} &= 0, \\ e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\,\varepsilon_{\mu\lambda} + b_{\alpha\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta} &= 0, \\ e_{\alpha\beta}\,\overset{\times}{\varkappa}{}^{\alpha\beta} + e^{\alpha\beta}\,b^\lambda_\alpha\,\varepsilon_{\beta\lambda} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6,28}^{\bullet}$$

genügen, aus einem Verschiebungsvektor v ab:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^{il} &= e^{i\alpha}\,e^{l\beta}\,[\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\,v + \nabla_\alpha(b^\lambda_\beta\,v_\lambda)] - \frac{1}{2}\,e^{i\alpha}\,e^{\lambda\beta}\,b^l_\lambda\,\nabla_\lambda\,v_\beta, \\ \varepsilon_{il} &= \frac{1}{2}\,(\nabla_i\,v_l + \nabla_l\,v_i) - b_{il}\,v + \underline{\frac{t^2}{12}\cdot\frac{1}{2}\,(b^\alpha_l\,\nabla_i - b^\alpha_i\,\nabla_l)\,\nabla_\alpha\,v}. \end{aligned}\right\} \tag{6,29}^{\bullet}$$

Das unterstrichene Glied fällt weg, wenn der Tensor ε_{il} als symmetrisch angenommen wird.

Mit seinem symmetrischen Teil und dem Momententensor ist auch der ganze Längskrafttensor bestimmt. Er berechnet sich zu

$$N^{il} = \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\left(a^{i\alpha}\,a^{l\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \frac{t^2}{12}\,W^{il}_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta}\right) + \nu\left(a^{il}\,\varepsilon + \frac{t^2}{12}\,V^{il}_{\cdot\cdot\,\alpha\beta}\,\varkappa^{\alpha\beta}\right)\right] \tag{6,30}$$

mit

$$W^{il}_{\cdot\cdot rs} = U^{il}_{\cdot\cdot rs} + \frac{1}{2}\left(b^i_s\,\delta^l_r - b^l_s\,\delta^i_r\right). \tag{6,31}$$

Eine analoge Formel könnte auch für die Verkrümmungen $\varkappa^{il}$ aufgestellt werden; dies ist aber nicht erforderlich, weil das Elastizitätsgesetz hier unmittelbar den vollen Tensor liefert.

Sehr leicht läßt sich jetzt auch die elastische Energie angeben; als Deformationsenergie

$$\begin{aligned} \Pi[\hat{\varepsilon}_{il}, \hat{\varkappa}^{rs}] = \frac{1}{2}\int\int \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\,a^{\alpha\lambda}\,a^{\beta\mu} + \nu\,a^{\alpha\beta}\,a^{\lambda\mu}\right]\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\hat{\varepsilon}_{\lambda\mu}\,df \\ + \frac{1}{2}\int\int \frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}\{[(1-\nu)\,a_{\alpha\lambda}\,a_{\beta\mu} + \nu\,a_{\alpha\beta}\,a_{\lambda\mu}]\,\hat{\varkappa}^{\alpha\beta}\,\hat{\varkappa}^{\lambda\mu} \\ + 2\,[(1-\nu)\,U^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} + \nu\,V^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}]\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\hat{\varkappa}^{\lambda\mu}\}\,df, \end{aligned} \tag{6,32}^*$$

und als Spannungsenergie

$$\begin{aligned} \Pi[\overline{M}_{il}, \overline{N}^{rs}] = \frac{1}{2}\int\int \frac{12}{E\,t^3}\left[(1+\nu)\,a^{\alpha\lambda}\,a^{\beta\mu} - \nu\,a^{\alpha\beta}\,a^{\lambda\mu}\right]\hat{M}_{\alpha\beta}\,\hat{M}_{\lambda\mu}\,df \\ + \frac{1}{2}\int\int \frac{1}{E\,t}\{[(1+\nu)\,a_{\alpha\lambda}\,a_{\beta\mu} - \nu\,a_{\alpha\beta}\,a_{\lambda\mu}]\,\hat{N}^{\alpha\beta}\,\hat{N}^{\lambda\mu} \\ + 2\,[(1+\nu)\,\tilde{U}^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} - \nu\,\tilde{V}^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}]\hat{M}_{\alpha\beta}\,\hat{N}^{\lambda\mu}\}\,df. \end{aligned} \tag{6,33}^*$$

Abschließend wollen wir die Frage der Randbedingungen erörtern. Die virtuelle Änderung der Formänderungsenergie ist gleich der negativen virtuellen Arbeit der Beanspruchungsgrößen, so daß wir aus (4,2) erhalten

$$\begin{aligned} \delta\Pi[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}] &= \delta\Pi[\varepsilon_{il}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}), \varkappa^{rs}(\boldsymbol{\omega})] = -\delta A^{(i)} \\ &= \iint e^{\alpha\beta}\{K_\beta \circ [\nabla_\alpha(\delta\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{a}_\alpha \times \delta\boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{M}_\beta \circ \nabla_\alpha(\delta\boldsymbol{\omega})\}\,df. \end{aligned} \tag{6,34}$$

Sind die Gleichgewichtsbedingungen für die Beanspruchungen erfüllt, so bleibt nur ein Randausdruck übrig

$$\delta\Pi[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}] = \delta\Pi[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}]_{Rand} = \oint e^{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{K}_\beta \circ \delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{M}_\beta \circ \delta\boldsymbol{\omega})\,n_\alpha\,ds\,; \tag{6,35}$$

$$\delta\Pi[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}] = \oint (\boldsymbol{K}_\alpha\,t^\alpha \circ \delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{M}_\alpha\,t^\alpha \circ \delta\boldsymbol{\omega})\,ds\,. \tag{6,36}$$

Nun ist

$$t^i = \frac{dq^i}{ds}, \tag{6,37}$$

und wegen

$$\boldsymbol{M}_i \circ \boldsymbol{E} = 0\,, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_i \circ \boldsymbol{E} = 0$$

läßt sich (6,36) mit Hilfe von (3,12) und (4,16) in

$$\delta\Pi[\boldsymbol{v}] = \oint (\boldsymbol{K} \circ \delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{M} \circ \delta\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}))\,ds = \oint [\boldsymbol{K} \circ \delta\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{e}^\alpha \circ \boldsymbol{M})\,(\nabla_\alpha(\delta\boldsymbol{v}) \circ \boldsymbol{E})]\,ds \tag{6,38}$$

umformen. Ferner ist

$$\boldsymbol{e}^\alpha = n^\alpha\,\boldsymbol{t} - t^\alpha\,\boldsymbol{n}\,; \tag{6,39}$$

damit ergibt sich

$$\delta\Pi[\boldsymbol{v}] = \oint \left[\boldsymbol{K} + (\boldsymbol{M}_D\,\boldsymbol{E}) \circ \frac{\partial(\delta\boldsymbol{v})}{\partial s} - (\boldsymbol{M}_B\,\boldsymbol{E}) \circ \frac{\partial(\delta\boldsymbol{v})}{\partial n}\right] ds \tag{6,40}$$

und schließlich, nach einer partiellen Integration,

$$\delta\Pi[\boldsymbol{v}] = \oint \left\{\left[\boldsymbol{K} - \frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{M}_D\,\boldsymbol{E})\right] \circ \delta\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{M}_B\,\boldsymbol{E}) \circ \frac{\partial(\delta\boldsymbol{v})}{\partial n}\right\} ds \tag{6,41}^*$$

mit der bereits von (4,17) her bekannten Zusatzkraft im Integranden. Nachträglich führen wir hier noch die Beanspruchungsgrößen wieder ein; es ist

$$\boldsymbol{M}_D = \boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{M}_{\alpha\beta}\,t^\alpha\,n^\beta\,, \qquad \boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M} \circ \boldsymbol{t} = \hat{\boldsymbol{M}}_{\alpha\beta}\,t^\alpha\,t^\beta\,, \tag{6,42}$$

und ferner nach (4,5), (4,16) und (4,21)

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_\alpha\,t^\alpha = \boldsymbol{N}^\alpha\,n_\alpha = \left(N^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}_\beta + N^\alpha\,\boldsymbol{E}\right)n_\alpha\,. \tag{6,43}$$

Ganz entsprechend können wir aus (4,34) die Randformel für die virtuelle Änderung der Spannungsenergie (6,33) entwickeln. Das Ergebnis ist, wenn die Beanspruchungen ein Gleichgewichtssystem bilden,

$$\delta\Pi[M_{il}(\boldsymbol{\Phi}), N^{rs}(\boldsymbol{\Phi})] = -\oint \left\{\left[\boldsymbol{\varkappa} - \frac{\partial}{\partial s}(\gamma\,\boldsymbol{E})\right] \circ \delta\boldsymbol{\Phi} - (\varepsilon\,\boldsymbol{E}) \circ \frac{\partial(\delta\boldsymbol{\Phi})}{\partial n}\right\} ds \tag{6,44}^*$$

mit

$$\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\varkappa}^\alpha\,n_\alpha = (\varkappa^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}_\beta + \varkappa^\alpha\,\boldsymbol{E})\,n_\alpha\,, \tag{6,45}$$

und es ist nach (3,31), 3,32), (3,5)

$$\gamma = \boldsymbol{\epsilon} \circ \boldsymbol{n} = \varepsilon_{\alpha\beta} t^\alpha n^\beta , \qquad \varepsilon = \boldsymbol{\epsilon} \circ \boldsymbol{t} = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta . \tag{6,46}$$

7. Die Schalengleichungen in den Koordinaten der Krümmungslinien; Zylinder- und Kugelschale; Membranspannungszustand. Wenn es irgend möglich ist, wird man als Parameterkurven auf der Mittelfläche die Krümmungslinien wählen — insbesondere also dann, wenn der Schalenrand eine Krümmungslinie ist oder stückweise aus solchen besteht. Da es sich um ein Orthogonalnetz handelt, können wir unsere Schreibweise etwas vereinfachen; wir setzen

$$a_{11} = \alpha_1 , \qquad a_{22} = \alpha_2 ,$$

und es ist

$$a^{11} = \frac{1}{\alpha_1} , \qquad a^{22} = \frac{1}{\alpha_2} , \qquad a = \alpha_1 \alpha_2 . \tag{7,1}$$

Die für das kovariante Differentiieren benötigten Dreiindizessymbole sind

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_1}\partial_1 \alpha_1 , && \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_1}\partial_2 \alpha_1 , && \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_1}\partial_1 \alpha_2 , \\ &\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_2}\partial_2 \alpha_1 , && \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_2}\partial_1 \alpha_2 , && \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_2}\partial_2 \alpha_2 . \end{aligned}\right\} \tag{7,2}$$

Im Folgenden sind weiter die geometrischen Tensoren (6,20) und (6,31) zusammengestellt, wobei die Vorzeichen nach (2,27) gewählt wurden:

$$\left.\begin{aligned}
&U^{11}_{..11} = U^{11}_{..12} = U^{11}_{..21} = 0 , \\
&U^{11}_{..22} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \\
&U^{12}_{..11} = U^{12}_{..22} = 0 , \\
&U^{12}_{..12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \qquad U^{12}_{..21} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \\
&U^{22}_{..11} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \\
&U^{22}_{..12} = U^{22}_{..21} = U^{22}_{..22} = 0 ; \\
&V^{11}_{..11} = V^{11}_{..12} = V^{11}_{..21} = 0 , \\
&V^{11}_{..22} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \\
&V^{12}_{..rs} = 0; \\
&V^{22}_{..11} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \\
&V^{22}_{..12} = V^{22}_{..21} = V^{22}_{..22} = 0 . \\
&\widetilde{U}^{il}_{..rs} = -U^{il}_{..rs} , \qquad \widetilde{V}^{il}_{..rs} = -V^{il}_{..rs} ; \\
&U_{il}{}^{rs}_{..} = \frac{\alpha_i \alpha_l}{\alpha_r \alpha_s} U^{il}_{..rs} \\
&\qquad \text{(entsprechend für die übrigen Größen);} \\
&W^{12}_{..12} = \frac{1}{2R_1} , \qquad W^{12}_{..21} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \\
&W^{21}_{..11} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{2}{R_2}\right), \qquad W^{21}_{..21} = \frac{1}{2R_2} , \\
&\text{sonst ist} \\
&W^{il}_{..rs} = U^{il}_{..rs} .
\end{aligned}\right\} \tag{7,3}$$

Damit folgt

$$\left.\begin{aligned} N^{11} &= \frac{Et}{1-\nu^2}\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\varepsilon_{11}+\nu\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varepsilon_{22}+\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varkappa^{22}\right],\\ \hat{N}^{12} &= \frac{Et}{1-\nu^2}(1-\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\hat{\varepsilon}_{12}+\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)(\varkappa^{12}-\varkappa^{21})\right]\approx\frac{Et}{1-\nu^2}(1-\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\hat{\varepsilon}_{12},\\ N^{22} &= \frac{Et}{1-\nu^2}\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\varepsilon_{22}+\nu\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\varepsilon_{11}-\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varkappa^{11}\right]; \end{aligned}\right\}\quad(7{,}4)^*$$

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\alpha_1\alpha_1\left[\varkappa^{11}+\nu\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\varkappa^{22}-\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varepsilon_{22}\right],\\ M_{12} &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\,\alpha_1\alpha_2\varkappa^{12}, \qquad M_{21} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(1-\nu)\,\alpha_1\alpha_2\varkappa^{21},\\ M_{22} &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\alpha_2\alpha_2\left[\varkappa^{22}+\nu\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varkappa^{11}+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varepsilon_{11}\right]. \end{aligned}\right\}\quad(7{,}5)^*$$

mit folgender Umkehrung:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^{11} &= -\frac{12}{Et^3}\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_1}\left[M_{11}-\nu\frac{\alpha_1}{\alpha_2}M_{22}-\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)N^{22}\right],\\ \varkappa^{12} &= -\frac{12}{Et^3}(1+\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}M_{12}, \qquad \varkappa^{21} = -\frac{12}{Et^3}(1+\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}M_{21},\\ \varkappa^{22} &= -\frac{12}{Et^3}\,\frac{1}{\alpha_2\alpha_2}\left[M_{22}-\nu\frac{\alpha_2}{\alpha_1}M_{11}+\frac{t^2}{21}\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)N^{11}\right]; \end{aligned}\right\}\quad(7{,}6)^*$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{Et}\alpha_1\alpha_1\left[N^{11}-\nu\frac{\alpha_2}{\alpha_1}N^{22}+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)M_{22}\right],\\ \hat{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{Et}(1+\nu)\,\alpha_1\alpha_2\left[\hat{N}^{12}+\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)(M_{12}-M_{21})\right]\approx\frac{1}{Et}(1+\nu)\,\alpha_1\alpha_2\hat{N}^{12},\\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{Et}\alpha_2\alpha_2\left[N^{22}-\nu\frac{\alpha_1}{\alpha_2}N^{11}-\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)M_{11}\right]. \end{aligned}\right\}\quad(7{,}7)^*$$

Ferner ist noch

$$\left.\begin{aligned} N^{12} &= \frac{Et}{1-\nu^2}(1-\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\hat{\varepsilon}_{12}+\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1}\varkappa^{12}-\left(\frac{2}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varkappa^{21}\right]\right\},\\ N^{21} &= \frac{Et}{1-\nu^2}(1-\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\hat{\varepsilon}_{12}+\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_2}\varkappa^{21}+\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2}{R_2}\right)\varkappa^{12}\right]\right\}. \end{aligned}\right\}\quad(7{,}8)$$

Da wir in diesem Zusammenhang den antimetrischen Teil $\overset{\times}{\varkappa}{}^{il}$ von $\varkappa^{il}$ vernachlässigen dürfen, können wir statt (7,8) etwas übersichtlicher schreiben

$$\left.\begin{aligned} N^{12} &= \frac{Et}{1-\nu^2}(1-\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\hat{\varepsilon}_{12}-\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varkappa^{12}\right],\\ N^{21} &= \frac{Et}{1-\nu^2}(1-\nu)\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\hat{\varepsilon}_{12}+\frac{t^2}{12}\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varkappa^{21}\right]. \end{aligned}\right\}\quad(7{,}9)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (6,26) spaltet man am besten wieder nach (4,27), (4,28) auf, da die Formeln sonst zu unübersichtlich werden:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_1 N^{11}+\partial_2 N^{21}+2\,\Gamma^1_{11}N^{11}+\Gamma^1_{12}(N^{12}+2\,N^{21})\\ &\quad+\Gamma^1_{22}N^{22}+\Gamma^2_{12}N^{11}+\Gamma^2_{22}N^{21}+\frac{1}{R_1}N^1=0,\\ &\partial_1 N^{12}+\partial_2 N^{22}+2\,\Gamma^2_{22}N^{22}+\Gamma^2_{12}(N^{21}+2\,N^{12})\\ &\quad+\Gamma^2_{11}N^{11}+\Gamma^1_{12}N^{22}+\Gamma^1_{11}N^{12}+\frac{1}{R_2}N^2=0; \end{aligned}\right\}\quad(7{,}10)$$

$$\left.\begin{aligned} N^1 &= \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\partial_1 M_{22} - \partial_2 M_{12} + \Gamma^1_{22} M_{11} + \Gamma^2_{22} M_{12} - \Gamma^1_{12} M_{21} - \Gamma^2_{12} M_{22}\right), \\ N^2 &= \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left(\partial_2 M_{11} - \partial_1 M_{21} + \Gamma^2_{22} M_{22} + \Gamma^1_{11} M_{21} - \Gamma^2_{12} M_{12} - \Gamma^1_{12} M_{11}\right); \end{aligned}\right\} \tag{7,11}$$

$$\partial_1 N^1 + \partial_2 N^2 + \left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) N^1 + \left(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\right) N^2 - \frac{1}{R_1} N^{11} - \frac{1}{R_2} N^{22} = 0\,. \tag{7,12}$$

Und schließlich ist nach (6,29)

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^{11} &= \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\partial_2\partial_2 v + \Gamma^2_{22}\left(\frac{1}{R_2} v_2 - \partial_2 v\right) - \Gamma^1_{22}\partial_1 v - \partial_2\left(\frac{1}{R_2} v_2\right)\right], \\ \varkappa^{12} &= -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\partial_1\partial_2 v + \Gamma^1_{12}\left(\frac{1}{R_1} v_1 - \partial_1 v\right) - \Gamma^2_{12}\partial_2 v - \frac{1}{R_2}\cdot\frac{1}{2}\left(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\right) - \partial_2\left(\frac{1}{R_1} v_1\right)\right], \\ \varkappa^{21} &= -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\partial_1\partial_2 v + \Gamma^2_{12}\left(\frac{1}{R_2} v_2 - \partial_2 v\right) - \Gamma^1_{12}\partial_1 v - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{2}\left(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2\right) - \partial_1\left(\frac{1}{R_2} v_2\right)\right], \\ \varkappa^{22} &= \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}\left[\partial_1\partial_1 v + \Gamma^1_{11}\left(\frac{1}{R_1} v_1 - \partial_1 v\right) - \Gamma^2_{11}\partial_2 v - \partial_1\left(\frac{1}{R_1} v_1\right)\right]; \end{aligned}\right\} \tag{7,13}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \partial_1 v_1 - \Gamma^1_{11} v_1 - \Gamma^2_{11} v_2 + \frac{\alpha_1}{R_1} v\,, \\ \hat{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2}\left(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1\right) - \Gamma^1_{12} v_1 - \Gamma^2_{12} v_2\,, \\ \varepsilon_{22} &= \partial_2 v_2 - \Gamma^1_{22} v_1 - \Gamma^2_{22} v_2 + \frac{\alpha_2}{R_2} v\,. \end{aligned}\right\} \tag{7,14}$$

Setzt man nun die durch die Verschiebungen ausgedrückten Deformationen (7,13), (7,14) in die Gleichungen (7,4) bzw. (7,9) und (7,5) des Stoffgesetzes ein, so sind die Beanspruchungen N^{ij} und M_{ij} und nach (7,11) auch die Querkräfte als Funktionen des Verschiebungsfeldes der Mittelfläche bekannt. Die Gleichgewichtsbedingungen (7,10) und (7,12) liefern dann 3 Differentialgleichungen für die Komponenten v_1, v_2 und v des Verschiebungsvektors $\boldsymbol{v}$. In analoger Weise verfährt man, um die Differentialgleichungen des dualen Problems für die Komponenten Φ_1, Φ_2 und Φ des Spannungsfunktionenvektors $\boldsymbol{\Phi}$ abzuleiten; das soll hier nicht weiter ausgeführt werden, weil sich dabei weder besondere Schwierigkeiten noch neue Einsichten ergeben.

Besonders einfach werden unsere Gleichungen für den geraden Kreiszylinder (Radius R), auf dem wir die Koordinaten $q^{(1)} = s_1$ in Richtung der Erzeugenden, $q^{(2)} = s_2\,(= R\varphi)$ in Umfangsrichtung und $q^{(3)} = z$ in Richtung der äußeren Normalen einführen, so daß

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\,, \qquad R_1 \to \infty\,, \qquad R_2 = R \tag{7,15}$$

wird. Sämtliche Dreiindizessymbole verschwinden, und es ist nicht mehr erforderlich, zwischen kovarianten und kontravarianten Indizes zu unterscheiden; der Einfachheit halber schreiben wir sie jetzt alle als untere Indizes. Wir bekommen mit $c^2 = t^2/12\,R^2$

$$\left.\begin{aligned} N_{11} &= \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{11} + \nu\,\varepsilon_{22} - c^2\,R\,\varkappa_{22}\right), \\ N_{12} &= \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left(1-\nu\right)\left(\hat{\varepsilon}_{12} + \frac{1}{2}\,c^2\,R\,\varkappa_{12}\right), \\ N_{21} &= \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left(1-\nu\right)\left(\hat{\varepsilon}_{12} - \frac{1}{2}\,c^2\,R\,\varkappa_{21}\right), \\ N_{22} &= \frac{E\,t}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{22} + \nu\,\varepsilon_{11} + c^2\,R\,\varkappa_{11}\right); \end{aligned}\right\} \tag{7,16}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= -\frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(\varkappa_{11} + \nu\,\varkappa_{22} + \frac{1}{R}\,\varepsilon_{22}\right), \\ M_{12} &= -\frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(1-\nu\right)\varkappa_{12}\,, \\ M_{21} &= -\frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(1-\nu\right)\varkappa_{21}\,, \\ M_{22} &= -\frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(\varkappa_{22} + \nu\,\varkappa_{11} - \frac{1}{R}\,\varepsilon_{11}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7,17}$$

$$N_1 = \partial_1 M_{22} - \partial_2 M_{12}\,, \qquad N_2 = \partial_2 M_{11} - \partial_1 M_{21}\,; \tag{7,18}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa_{11} &= \partial_2\partial_2 v - \frac{1}{R}\,\partial_2 v_2\,,\\
\varkappa_{12} &= -\,\partial_1\partial_2 v - \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{2}\,(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\,,\\
\varkappa_{21} &= -\,\partial_1\partial_2 v - \frac{1}{R}\,\partial_1 v_2\,,\\
\varkappa_{22} &= \partial_1\partial_1 v;\\
\varepsilon_{11} &= \partial_1 v_1\,,\\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\,(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1)\,,\\
\varepsilon_{22} &= \partial_2 v_2 + \frac{1}{R}\,v\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7,19}$$

$$\left.\begin{aligned}
\partial_1 N_{11} + \partial_2 N_{21} &= 0\,,\\
\partial_1 N_{12} + \partial_2 N_{22} + \frac{1}{R}\,N_2 &= 0\,,\\
\partial_1 N_1 + \partial_2 N_2 - \frac{1}{R}\,N_{22} &= 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{7,20}$$

Die Differentialgleichungen für v_1, v_2 und v lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_1\partial_1 + \frac{1-\nu}{2}\,\partial_2\partial_2\right)v_1 + \left(\frac{1+\nu}{2}\,\partial_1\partial_2\right)v_2 + \left[-\,c^2\,R\,\partial_1\left(\partial_1\partial_1 - \frac{1-\nu}{2}\,\partial_2\partial_2\right) + \frac{\nu}{R}\,\partial_1\right]v = 0\,,\\
&\left(\frac{1+\nu}{2}\,\partial_1\partial_2\right)v_1 + \left(\partial_2\partial_2 + \frac{1-\nu}{2}\,\partial_1\partial_1\right)v_2 + \left(-\,c^2\,R\,\frac{3-\nu}{2}\,\partial_1\partial_1\partial_2 + \frac{1}{R}\,\partial_2\right)v = 0\,,\\
&\left[-\,c^2\,R\,\partial_1\left(\partial_1\partial_1 - \frac{1-\nu}{2}\,\partial_2\partial_2\right) + \frac{\nu}{R}\,\partial_1\right]v_1 + \left(-\,c^2\,R\,\frac{3-\nu}{2}\,\partial_1\partial_1\partial_2 + \frac{1}{R}\,\partial_2\right)v_2\\
&\qquad + \left[c^2\,R^2\left(\triangle\,\triangle + \frac{2}{R^2}\,\partial_2\partial_2 + \frac{1}{R^4}\right) + \frac{1}{R^2}\right]v = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{7,21}$$

mit symmetrischer Matrix der Differentialoperatoren.

Diese Gleichungen finden sich auch bei *Wlassow*[1]. Da dort mit anderen Deformationen und Beanspruchungsgrößen gerechnet wird, mag diese Übereinstimmung im Resultat als willkommene Kontrolle angesehen werden. Rechnet man nun das duale Problem für die Spannungsfunktionen Φ_1, Φ_2 und Φ durch, so kommt man auf folgende Schlußgleichungen (es sind dies die in den Spannungsfunktionen geschriebenen Verträglichkeitsbedingungen):

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_1\partial_1 + \frac{1+\nu}{2}\,\partial_2\partial_2\right)\Phi_1 + \left(\frac{1-\nu}{2}\,\partial_1\partial_2\right)\Phi_2 + \left[c^2\,R\,\partial_1\left(\partial_1\partial_1 + \frac{1+\nu}{2}\,\partial_2\partial_2\right) - \frac{\nu}{R}\,\partial_1\right]\Phi = 0\,,\\
&\left(\frac{1-\nu}{2}\,\partial_1\partial_2\right)\Phi_1 + \left(\partial_2\partial_2 + \frac{1+\nu}{2}\,\partial_1\partial_1\right)\Phi_2 + \left[-\,c^2\,R\,\partial_2\left(\frac{3+\nu}{2}\,\partial_1\partial_1 + 2\,\partial_2\partial_2\right) + \frac{1}{R}\,\partial_2\right]\Phi = 0\,,\\
&\left[c^2\,R\,\partial_1\left(\partial_1\partial_1 + \frac{1+\nu}{2}\,\partial_2\partial_2\right) - \frac{\nu}{R}\,\partial_1\right]\Phi_1 + \left[-\,c^2\,R\,\partial_2\left(\frac{3+\nu}{2}\,\partial_1\partial_1 + 2\,\partial_2\partial_2\right) + \frac{1}{R}\,\partial_2\right]\Phi_2\\
&\qquad + \left[c^2\,R^2\left(\triangle\,\triangle - \frac{2}{R^2}\,\partial_2\partial_2 + \frac{1}{R^4}\right) + \frac{1}{R^2}\right]\Phi = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{7,22}$$

mit ebenfalls symmetrischer Matrix der Differentialoperatoren. Die Ansätze

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= A_1\,e^{\lambda\frac{s_1}{R}}\,e^{i\,m\frac{s_2}{R}}, & \Phi_1 &= B_1\,e^{\lambda\frac{s_1}{R}}\,e^{i\,m\frac{s_2}{R}},\\
v_2 &= A_2\,e^{\lambda\frac{s_1}{R}}\,e^{i\,m\frac{s_2}{R}}, & \Phi_2 &= B_2\,e^{\lambda\frac{s_1}{R}}\,e^{i\,m\frac{s_2}{R}},\\
v &= A\,e^{\lambda\frac{s_1}{R}}\,e^{i\,m\frac{s_2}{R}}, & \Phi &= B\,e^{\lambda\frac{s_1}{R}}\,e^{i\,m\frac{s_2}{R}}
\end{aligned}\right\} \tag{7,23}$$

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 160.

zur Lösung der Differentialgleichungen (7,21) bzw. (7,22) führen in beiden Fällen zu der „charakteristischen Gleichung“

$$\lambda^8 - 2\,(2\,m^2 - \nu)\,\lambda^6 + \left[\frac{1-\nu^2}{c^2} + 6\,m^2\,(m^2-1) + 1\right]\lambda^4$$
$$- 2\,m^2\,[2\,m^4 + (4-\nu)\,m^2 + 2]\,\lambda^2 + m^4\,(m^2-1)^2 = 0\,. \qquad (7{,}24)$$

Physikalisch bedeutet dies: Verschiebungen und Spannungsfunktionen zeigen das gleiche Abklingverhalten vom Rande weg, was zwar plausibel, aber den Differentialgleichungen (7,21), (7,22) nicht ohne weiteres anzusehen ist. Nur in unwesentlichen Termen weicht (7,24) von den charakteristischen Gleichungen ab, die *W. Flügge*[1] und *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*[2] bzw. *K. Girkmann*[3] gefunden haben. (Vereinfacht man das ganze Problem dadurch, daß man zum Elastizitätsgesetz des ebenen Flächenträgers übergeht, so erhält man, wie *H. Schaefer*[4] gezeigt hat, Differentialgleichungen, die sich voneinander nur noch durch das Vorzeichen von ν unterscheiden, so daß die Analogie stärker hervortritt; in den charakteristischen Gleichungen selbst, die wieder übereinstimmen, kommt ν nur in der Kombination $(1-\nu^2)$ vor.

Starke Vereinfachungen ergeben sich auch bei der Kugelschale. Ist ihr Halbmesser R, so wird der zweite Haupttensor

$$b_{il} = -\frac{1}{R}\,a_{il}\,, \qquad (7{,}25)$$

also ebenfalls kovariant konstant. Infolgedessen wird nach (6,27) der Momententensor symmetrisch und daher auch der Verkrümmungstensor. Aus der algebraischen Gleichgewichtsbedingung folgt dann ferner die Symmetrie des Längskrafttensors — kurz: alle Feldgrößen der Schale werden durch symmetrische Tensoren beschrieben, also

$$N^{jl} = \hat{N}^{il} = \frac{E\,t}{1-\nu^2}\,[(1-\nu)\,a^{i\alpha}\,a^{l\beta} + \nu\,a^{il}\,a^{\alpha\beta}]\,\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,,$$
$$M_{il} = \hat{M}_{il} = -\frac{E\,t^3}{12\,(1-\nu^2)}\,[(1-\nu)\,a_{i\alpha}\,a_{l\beta} + \nu\,a_{il}\,a_{\alpha\beta}]\,\hat{\varkappa}^{\alpha\beta}\,; \qquad (7{,}26)$$

$$\varkappa^{il} = \hat{\varkappa}^{il} = -\frac{12}{E\,t^3}\,[(1+\nu)\,a^{i\alpha}\,a^{l\beta} - \nu\,a^{il}\,a^{\alpha\beta}]\,\hat{M}_{\alpha\beta}\,,$$
$$\varepsilon_{il} = \hat{\varepsilon}_{il} = \frac{1}{E\,t}\,[(1+\nu)\,a_{i\alpha}\,a_{l\beta} - \nu\,a_{il}\,a_{\alpha\beta}]\,\hat{N}^{\alpha\beta}\,; \qquad (7{,}27)$$

$$\nabla_\alpha\left(\hat{N}^{\alpha l} + e^{\alpha\lambda}\,e^{l\mu}\,\frac{1}{R}\,\hat{M}_{\lambda\mu}\right) = 0\,, \qquad e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\hat{M}_{\lambda\mu} - \frac{1}{R}\,a_{\alpha\beta}\,\hat{N}^{\alpha\beta} = 0\,; \qquad (7{,}28)$$

(Gleichgewicht)

$$\nabla_\alpha\left(\hat{\varkappa}^{\alpha l} + e^{\alpha\lambda}\,e^{l\mu}\,\frac{1}{R}\,\hat{\varepsilon}_{\lambda\mu}\right) = 0\,, \qquad e^{\alpha\lambda}\,e^{\beta\mu}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\,\hat{\varepsilon}_{\lambda\mu} - \frac{1}{R}\,a_{\alpha\beta}\,\hat{\varkappa}^{\alpha\beta} = 0\,; \qquad (7{,}29)$$

(Verträglichkeit)

$$\hat{N}^{il} = e^{i\alpha}\,e^{l\beta}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\,\Phi - \frac{1}{R}\left[a^{il}\,a^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,(a^{i\alpha}\,a^{l\beta} + a^{l\alpha}\,a^{i\beta})\right]\nabla_\alpha\,\Phi_\beta\,,$$
$$\hat{M}_{il} = \frac{1}{2}\,(\nabla_i\,\Phi_l + \nabla_l\,\Phi_i) + \frac{1}{R}\,a_{il}\,\Phi\,; \qquad (7{,}30)$$

$$\hat{\varkappa}^{il} = e^{i\alpha}\,e^{l\beta}\,\nabla_\alpha\,\nabla_\beta\,v - \frac{1}{R}\left[a^{il}\,a^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,(a^{i\alpha}\,a^{l\beta} + a^{l\alpha}\,a^{i\beta})\right]\nabla_\alpha\,v_\beta\,,$$
$$\hat{\varepsilon}_{il} = \frac{1}{2}\,(\nabla_i\,v_l + \nabla_l\,v_i) + \frac{1}{R}\,a_{il}\,v\,. \qquad (7{,}31)$$

---

[1] Siehe Fußnote 3 von Seite 167.
[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[3] *K. Girkmann*, Flächentragwerke, 5. Aufl. Wien 1959.
[4] Siehe Fußnote 4 von Seite 160.

Artet die Kugel mit $R \to \infty$ zum ebenen Flächenträger aus, so reduzieren sich die Gleichungen (7,26) (7,31) auf das bekannte Analogiesystem Platte/Scheibe; $\Phi(q^{(1)}, q^{(2)})$ wird die *Airy*sche Spannungsfunktion (*H. Schaefer*[1]).

Es ist selbstverständlich, daß in unseren Ansätzen auch die Gleichungen des Membranspannungszustandes der Schale enthalten sein müssen. *M. Lagally*[2] hat der Frage des Membranspannungszustandes eine interessante Abhandlung gewidmet; eine nicht kovariante Herleitung aus den allgemeinen Schalengleichungen gab der Verfasser[3]. Hier soll eine kovariante Darstellung gegeben werden: Im momentenfreien Zustand der Schale verschwinden nach (4,29) auch die Querkräfte N^l, so daß nach (4,24)

$$b_{\alpha\beta}\, \Omega^\beta = - \nabla_\alpha \Omega \tag{7,32}$$

wird. Wir nehmen jetzt an, daß die *Gauß*sche Krümmung K der Schale nicht verschwindet. Dann können wir den symmetrischen Tensor

$$B^{il} = e^{i\lambda}\, e^{l\mu}\, \frac{1}{K}\, b_{\lambda\mu} \tag{7,33}$$

bilden, dessen Matrix die Reziproke zur Matrix des Tensors b_{il} ist:

$$B^{i\alpha}\, b_{l\alpha} = e^{i\lambda}\, e^{\alpha\mu} \cdot \frac{1}{K}\, b_{\lambda\mu}\, b_{l\alpha} = (a^{i\alpha}\, a^{\lambda\mu} - a^{i\mu}\, a^{\lambda\alpha}) \cdot \frac{1}{K}\, b_{\lambda\mu}\, b_{l\alpha}$$

$$= \frac{1}{K}\,(2\, H\, b^i_l - c^i_l) = \frac{1}{K}\, K\, \delta^i_l = \delta^i_l \tag{7,34}$$

nach (2,30). Wir überschieben (7,32) mit $B^{\alpha l}$ und beachten (5,34); dann erhalten wir

$$\Omega^l = - e^{\alpha\lambda}\, e^{l\mu}\, \frac{1}{K}\, b_{\lambda\mu}\, \nabla_\alpha \Omega\,. \tag{7,35}$$

Nun ist aber, der algebraischen Gleichgewichtsbedingung (4,38) zufolge, im momentenfreien Zustand der Längskrafttensor symmetrisch:

$$e_{\alpha\beta}\, \overset{\times}{N}{}^{\alpha\beta} = 0\,, \tag{7,36}$$

und hieraus folgt nach (4,24)

$$\nabla_\beta \Omega^\beta - 2\, H\, \Omega = 0\,. \tag{7,37}$$

So ergibt sich, wenn man noch die *Codazzi*schen Gleichungen (2,33) benutzt, für $\Omega(q^{(1)}, q^{(2)})$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$e^{\alpha\lambda}\, e^{\beta\mu}\, b_{\lambda\mu}\, \nabla_\alpha\left(\frac{1}{K}\, \nabla_\beta \Omega\right) + 2\, H\, \Omega = 0\,. \tag{7,38}$$

Sie wurde von *Lagally* als die „charakteristische Differentialgleichung" des Problems bezeichnet. Wir zeigen noch, daß die Gleichgewichtsbedingung

$$b_{\alpha\beta}\, N^{\alpha\beta} = 0 \tag{7,39}$$

eine Identität wird; aus ihr folgt nämlich der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned}
b_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\lambda}\,(\nabla_\lambda \Omega^\beta - b^\beta_\lambda\, \Omega) &= 0\,,\\
b_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda \Omega^\beta - \overset{\times}{e}{}^{\alpha\lambda}\, \hat{c}_{\alpha\lambda}\, \Omega \equiv b_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda \Omega^\beta &= 0\,,\\
b_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda\left(\frac{1}{K}\, e^{\beta\sigma}\, e^{\varrho\tau}\, b_{\sigma\tau}\, \nabla_\varrho \Omega\right) &= 0\,,\\
e^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda\left[\frac{1}{K}\,(2\, H\, b_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta})\, \nabla^\beta \Omega\right] &= 0\,,\\
e^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda\left(\frac{1}{K}\, K\, a_{\alpha\beta}\, \nabla^\beta \Omega\right) \equiv e^{\alpha\lambda}\, \nabla_\lambda\, \nabla_\alpha \Omega &= 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{7,40}$$

und die letzte Gleichung ist die gesuchte Identität.

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 160.
[2] *M. Lagally*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 377.
[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 170.

Alles, was bisher über den Membranspannungszustand gesagt wurde, kann natürlich auf Grund unserer Analogie wörtlich auf den Fall der „reinen Biegung" übertragen werden, in dem die Mittelfläche von Verzerrungen frei ist — ein Fall, der besonders in den Anfängen der Schalentheorie gern betrachtet wurde, als die differentialgeometrischen Darstellungsmöglichkeiten noch nicht ausreichten, um den allgemeinen Fall in einigermaßen übersichtlicher Form behandeln zu können.

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob der Membranspannungszustand, der ja innerlich statisch bestimmt ist, bei vorgegebenem Stoffgesetz auch kinematisch möglich ist. Es ist bekannt, daß dies zwar allgemein nicht zutrifft, jedenfalls aber bei der Kugelschale konstanter Wandstärke, deren Deformationen nach (4,27) mit den Beanspruchungen verknüpft sind. Da die Momente M_{il} verschwinden, müssen auch die $\varkappa^{il}$ und nach (3,51) auch die $\varkappa^{i}$ Null sein, was nach (3,48)

$$\omega^{l} = 0\,, \qquad \omega = 0 \tag{7,41}$$

zur Folge hat. Wegen $\varepsilon_i = 0$ gibt dann die zweite der Gleichungen (3,49)

$$v_i = R\,\nabla_i v\,, \tag{7,42}$$

so daß der Tensor der Membrandeformationen

$$\varepsilon_{il} = R\left(\nabla_i \nabla_l v + \frac{1}{R^2} a_{il}\, v\right) \tag{7,43}$$

wird, also symmetrisch ist, wie es sein muß. Der Deformationszustand ist also durch die Normalverschiebung v allein bestimmt. Drückt man jetzt gemäß (7,26) den Längskrafttensor N^{il} durch ε_{il} und damit durch v aus, so erhält man aus den allein noch übrigbleibenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla_\alpha N^{\alpha l} \tag{7,44}$$

zwei Differentialgleichungen für v. Wir unterdrücken die umständliche Rechnung und schreiben gleich das Ergebnis hin:

$$\nabla_l\left(\triangle v + \frac{2}{R^2} v\right) = 0\,, \tag{7,45}$$

woraus

$$\triangle v + \frac{2}{R^2} v = \text{konst.} \tag{7,46}$$

folgt, und dies ist die gesuchte Differentialgleichung, während die charakteristische Differentialgleichung der Kugel

$$\triangle \Omega + \frac{2}{R^2} \Omega = 0 \tag{7,47}$$

lautet.

(Eingegangen am 4. Mai 1960.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Günther*, Karlsruhe, Technische Hochschule, Lehrstuhl für Theoretische Mechanik.

Ausbildung eines Wirbelpaares an den Kanten einer Platte

Von E. Wedemeyer

1. Einleitung. Bei stationärer Potentialströmung um eine Kante treten an ihr unendlich große Geschwindigkeiten und damit negativ unendlich große Drücke auf, die bei einer realen Flüssigkeit unmöglich sind. Wie die Erfahrung zeigt, lösen sich stattdessen von der Kante Wirbel ab, deren Einfluß auf die Strömung in jedem Augenblick derart ist, daß die Geschwindigkeit an der Kante endlich bleibt. Bei einer Behandlung des Problems für ideale Flüssigkeiten sind die Wirbel auf eine Fläche konzentriert, die von der Kante ausläuft und sich spiralig aufrollt. Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit (v_t) macht einen Sprung in der Wirbelfläche (auch Unstetigkeitsfläche) vom Betrag $\gamma = d\Gamma/ds$ = Belegungsdichte der Zirkulation.

Die vorliegende Rechnung behandelt die Ausbildung eines symmetrischen Paares von Unstetigkeitsflächen an den Kanten einer senkrecht angeströmten Platte. Für die Unstetigkeitsfläche an der Kante einer einseitig unendlich breiten Platte liegt bereits eine von *Anton*[1] gefundene Lösung vor. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird die von *Anton*[1] behandelte Aufgabe noch einmal mit einem etwas geänderten Verfahren behandelt, das größere Genauigkeit ermöglicht und als Ausgang für die Wirbelentwicklung an der endlich breiten Platte dienen konnte.

Als Nullpunkt der Strömungsebene (z-Ebene) wird die eine Plattenkante gewählt und die Platte in die negative y-Achse verlegt. Bei einer Breite der Platte $2H$ ist also ihr Bild gegeben durch das Stück $-2H < y < 0$. (Abb. 10) Ist die senkrecht zur Platte gerichtete Anströmgeschwindigkeit im Unendlichen v_∞, so ist im ersten Augenblick, solange sich noch kein Wirbel von merklicher Größe ausgebildet hat, das komplexe Potential der Strömung $F = v_\infty \sqrt{2\,i\,H\,z + z^2}$ und die konjugierte komplexe Geschwindigkeit $\bar{v} = v_x - i\,v_y = dF/dz$.

Läßt man nun $H \to \infty$ und $v_\infty \to 0$ gehen darart, daß $v_\infty \sqrt{H} = \text{konst.} = v_1 \sqrt{H_1}$ ist, so läßt sich das Potential für die unendlich breite Platte auch schreiben $F = v_1 \sqrt{2\,i\,H_1\,z}$. Dabei ist v_1 der Betrag der Geschwindigkeit im Punkt $z_1 = -i\,H_1/2$ und H_1 eine willkürlich festgelegte Länge. Die unendlich breite Platte wird jetzt durch das Stück $-\infty < y < 0$ der y-Achse dargestellt; die Plattenkante, von der die spiralförmige Unstetigkeitsfläche ausgeht, liegt im Punkt $z = 0$ (Abb. 1).

Abb. 1. Spiralförmige Unstetigkeitsfläche an der Kante der unendlich breiten Platte.

Das Problem für die unendlich breite Platte ist insofern sehr viel einfacher, als die zeitliche Änderung von Form und Belegungsdichte der Unstetigkeitsfläche in einer ähnlichen Vergrößerung erfolgt. Bei der Platte endlicher Breite stimmt der Vorgang am Anfang, solange der sich bildende Wirbel noch klein gegenüber der Plattenbreite ist, mit dem an der unendlich breiten Platte überein. Daher kann man bei der endlich breiten Platte von der Lösung für die unendlich breite Platte ausgehen und die Entwicklung von Form und Belegung der Unstetigkeitsfläche für eine Reihe späterer Zeitpunkte verfolgen.

Ist P ein Punkt auf der Unstetigkeitsfläche, so müssen in P dauernd folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit v_n ist zu beiden Seiten der Fläche gleich und gleich der Geschwindigkeit V_n, mit der sich die Unstetigkeitsfläche bei P senkrecht zu sich selbst verschiebt:

$$v_n = V_n\,. \tag{1}$$

2. Der Druck ist zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche gleich. Bezeichne der Index I die linke, der Index II die rechte Seite zur Durchlaufungsrichtung, so ist infolge der *Bernoulli*schen Gleichung für instationäre Strömung

$$\frac{1}{2}\,(v_{\mathrm{II}}^2 - v_{\mathrm{I}}^2) = \frac{\partial}{\partial t}\,(\Phi_{\mathrm{I}} - \Phi_{\mathrm{II}})$$

[1] *L. Anton*, Ing.-Arch. **10** (1939) S. 411.

und da $v_{\mathrm{I}\,n} = v_{\mathrm{II}\,n}$ ist, so folgt

$$\frac{1}{2}\,(v_{\mathrm{II}\,t} + v_{\mathrm{I}\,t})\,(v_{\mathrm{II}\,t} - v_{\mathrm{I}\,t}) = \frac{\partial}{\partial t}\,(\Phi_{\mathrm{I}} - \Phi_{\mathrm{II}})\,.$$

Nun ist $\Phi_{\mathrm{I}} - \Phi_{\mathrm{II}} = \Gamma_F$ die Zirkulation um das durch P abgetrennte „freie" Ende der Unstetigkeitsfläche. Bezeichnet man mit v_t den Mittelwert der tangentialen Geschwindigkeit und mit γ die Belegungsdichte der Zirkulation, so ist

$$v_{\mathrm{I}\,t} = v_t - \frac{\gamma}{2}\,, \qquad v_{\mathrm{II}\,t} = v_t + \frac{\gamma}{2}\,,$$

und man hat

$$\gamma\, v_t = \frac{\partial \Gamma_F}{\partial t}\,,$$

wobei der Differentialquotient $\partial\Phi/\partial t$ und damit auch $\partial\Gamma_F/\partial t$ an festgehaltener Stelle z zu nehmen ist. Das bedeutet, daß $\Delta\Gamma_F = \gamma\, v_t\, \Delta t$ den Unterschied der Zirkulation zweier solcher Abschnitte darstellt, die durch Verschiebung von P senkrecht zur Unstetigkeitsfläche nach der Zeit Δt auseinander hervorgehen. Läßt man dagegen, wie es bei ähnlich wachsender Unstetigkeitsfläche zweckmäßig ist, den Schnittpunkt P außerdem in tangentialer Richtung mit der der ähnlichen Vergrößerung entsprechenden Geschwindigkeit V_t wandern und vergleicht nunmehr die Zirkulationen $\Gamma_F(t)$ und $\Gamma_F(t + \Delta t)$ zweier durch P abgetrennter Abschnitte, so findet man

$$\Gamma_F(t + \Delta t) - \Gamma_F(t) = \Delta\Gamma_F = \gamma\,(v_t - V_t)\,\Delta t$$

oder

$$\gamma\,(v_t - V_t) = \frac{\partial \Gamma_F}{\partial t} \tag{2}$$

(siehe Abb. 2).

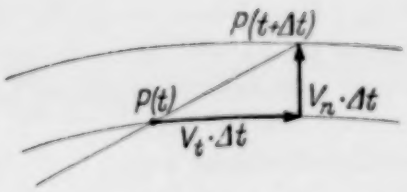

Abb. 2. Skizze zur anschaulichen Herleitung von Formel 2.

Abb. 3. Spiralförmige Unstetigkeitsfläche in der ζ-Ebene.

2. Theorie der unendlich breiten Platte. — a) Ähnlichkeitsgesetz. Durch die konforme Abbildung $\zeta = \xi + i\,\eta = \xi_1 \sqrt{2\,i\,z/H_1}$ wird die z-Ebene in die positiv imaginäre Hälfte der ζ-Ebene abgebildet. Das Bild der unendlich breiten Platte geht dabei über in die reelle Achse der ζ-Ebene ($\eta = 0$), wobei das Stück $\xi < 0$ die Vorderseite, $\xi > 0$ die Rückseite der Platte darstellt. Der Punkt $-i\,H_1/2$ in der z-Ebene, in dem die Geschwindigkeit $\pm v_1$ herrscht, entspricht den willkürlich wählbaren Punkten $\pm\xi_1$ der reellen Achse der ζ-Ebene. Der Einfachheit halber sei im folgenden $\xi_1 = H_1$ gewählt. Damit wird die Abbildungsfunktion

$$\zeta = \sqrt{2\,i\,H_1\,z} \tag{3}$$

und

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i\,H_1}{\zeta} = \sqrt{\frac{i\,H_1}{2\,z}}\,. \tag{4}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeiten in der ζ-Ebene werde das Bild der Unstetigkeitsfläche an der ξ-Achse gespiegelt (Abb. 3). Hierbei bleibt letztere Stromlinie, wenn man zudem $\gamma_\zeta(\bar{\zeta}) = -\gamma_\zeta(\zeta)$ macht. Hier bedeutet γ_ζ die Belegungsdichte in der ζ-Ebene, die mit der in der z-Ebene (γ) zusammenhängt durch $\gamma = \gamma_\zeta |d\zeta/dz|$. Die anfängliche Geschwindigkeitsverteilung in der z-Ebene $\bar{v}_0 = dF/dz = v_1 \sqrt{i\,H_1/2\,z}$ geht in der ζ-Ebene in $\bar{w}_0 = w_0 = \bar{v}_0/(d\zeta/dz) = v_1$, also in eine konstante Parallelströmung in Richtung der reellen Achse über. Darüber überlagert sich nach Ausbildung

des Wirbels als dessen Feld eine Störgeschwindigkeit. Ist die resultierende Geschwindigkeit w, so ergibt sich für $\overline{w}$

$$\overline{w} = w_\xi - i\, w_\eta = v_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_\zeta(s)}{\zeta - \zeta(s)}\, ds \,. \tag{5}$$

Dabei ist s die Bogenlänge auf der Unstetigkeitsfläche in der ζ-Ebene, und es gilt $s > 0$ für die Spiralwindung im positiv Imaginären und $s < 0$ für das Spiegelbild im negativ Imaginären. Die Geschwindigkeit v in der z-Ebene ergibt sich hieraus durch die Beziehung $\overline{v} = \overline{w}\, d\zeta/dz$.

Da bei der unendlich breiten Platte eine Vergleichslänge fehlt, ändern sich Form und Belegungsdichte der Unstetigkeitsfläche, wie schon erwähnt, in Form einer ähnlichen Vergrößerung, und zwar, wie schon vor langer Zeit *Prandtl*[1] ganz allgemein gezeigt hat, nach einem Potenzgesetz. Die von *Anton* aufgestellten Ähnlichkeitsgesetze mögen hier noch einmal kurz abgeleitet werden.

Ist $z^{(1)}$ ein Punkt der Unstetigkeitsfläche zur Zeit $t^{(1)}$, $F^{(1)}$ das komplexe Potential in diesem Punkt zur Zeit $t^{(1)}$, so hat man für einen zu $z^{(1)}$ ähnlichen Punkt z zur Zeit t anzusetzen $z/z^{(1)} = (t/t^{(1)})^n$ sowie für das komplexe Potential in diesem Punkt $F/F^{(1)} = (t/t^{(1)})^m$. Demgemäß gilt dann für die Strömungsgeschwindigkeiten

$$\frac{v}{v^{(1)}} = \frac{\overline{v}}{\overline{v}^{(1)}} = \frac{v_n}{v_n^{(1)}} = \frac{v_t}{v_t^{(1)}} = \frac{dF/dz}{dF^{(1)}/dz^{(1)}} = \left(\frac{t}{t^{(1)}}\right)^{m-n}.$$

Die Zirkulation Γ_F um das durch den Punkt z abgetrennte freie Ende der Wirbelfläche verhält sich als Potentialdifferenz auf beiden Seiten der Wirbelfläche ebenso wie die Potentiale. Es ist also

$$\Gamma_F/\Gamma_F^{(1)} = (t/t^{(1)})^m \,.$$

Bezeichnet man die Bogenlänge der Unstetigkeitsfläche in der z-Ebene mit s_z, so ist die Wirbelbelegung $\gamma = d\Gamma/ds_z$. Sie ist die Geschwindigkeitsdifferenz auf beiden Seiten der Wirbelfläche, verhält sich also wie die Geschwindigkeiten

$$\gamma/\gamma^{(1)} = (t/t^{(1)})^{m-n} \,.$$

Für die Wachstumsgeschwindigkeit $V = dz/dt$ bei der ähnlichen Vergrößerung gilt

$$\frac{V}{V^{(1)}} = \frac{V_n}{V_n^{(1)}} = \frac{V_t}{V_t^{(1)}} = \frac{dz/dt}{(dz/dt)^{(1)}} = (t/t^{(1)})^{n-1} \,.$$

Aus der Bedingung (1) $v_n = V_n$ ergibt sich nun

$$\left(\frac{t}{t^{(1)}}\right)^{m-n} = \left(\frac{t}{t^{(1)}}\right)^{n-1}.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn $m = 2n - 1$ ist. Das gleiche Ergebnis liefert auch die Bedingung (2)

$$\gamma(v_t - V_t) = d\Gamma_F/dt \,.$$

Für die ζ-Ebene gilt nun auf Grund der Abbildungsfunktion (3)

$$\zeta/\zeta^{(1)} = (t/t^{(1)})^{n/2} \,, \qquad F/F^{(1)} = (t/t^{(1)})^m \,, \qquad \frac{w}{w^{(1)}} = \frac{\overline{w}}{\overline{w}^{(1)}} = (t/t^{(1)})^{m-n/2} \,.$$

Da aber hier die Grundgeschwindigkeit $w_0 = v_1$ zeitlich konstant ist, erfordert die Ähnlichkeit der resultierenden Strömung, daß auch die Störgeschwindigkeit $(w - w_0)$ in ähnlichen Punkten zeitlich konstant ist. Es muß demnach

$$w/w^{(1)} = (t/t^{(1)})^{m-n/2} = 1 \,,$$

also $m = n/2$ sein. Zusammen mit der obigen Forderung $m = 2n - 1$ ergibt sich

$$m = 1/3 \,, \qquad n = 2/3$$

und damit für jeweils ähnliche Punkte

$$z/z^{(1)} = (t/t^{(1)})^{2/3} \,, \qquad \zeta/\zeta^{(1)} = (t/t^{(1)})^{1/3} \,, \qquad F/F^{(1)} = \Gamma/\Gamma^{(1)} = (t/t^{(1)})^{1/3}$$

in Übereinstimmung mit *Anton*.

[1] *L. Prandtl*, Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit. Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922, Berlin 1924. (Herausgegeben von *Th. v. Kármán* und *T. Levi-Civita*), S. 19—34.

Da die Störungsrechnungen zum großen Teil in der ζ-Ebene durchzuführen sind, ist es zweckmäßig, die Bedingungen (1) und (2) durch die in der ζ-Ebene gegebenen Größen auszudrücken. Für die Geschwindigkeit der ähnlichen Vergrößerung in der ζ-Ebene gilt

$$W = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\zeta}{3t}$$

mit den Komponenten normal und tangential im Punkt ζ

$$W_n = \frac{\zeta_n}{3t}, \qquad W_t = \frac{\zeta_t}{3t}.$$

Dabei bedeuten ζ_n und ζ_t die Komponenten des Vektors ζ zu einem Punkt der Wirbelfläche normal und parallel zur Tangente an die Wirbelfläche im Punkt ζ. Weiterhin ist

$$V_n = \left(\frac{dz}{dt}\right)_n = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_n = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \frac{\zeta_n}{3t}$$

und

$$v_n = w_n \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

Damit nimmt die Bedingung (1) $v_n = V_n$ die Form an

$$w_n \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \frac{\zeta_n}{3t}. \tag{6}$$

Da weiterhin, wenn γ die Belegungsdichte der Zirkulation in der z-Ebene und γ_ζ die in der ζ-Ebene ist,

$$\gamma = \gamma_\zeta \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \qquad v_t = w_t \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|, \qquad V_t = \left(\frac{dz}{dt}\right)_t = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_t, \qquad \frac{d\Gamma_F}{dt} = \frac{\Gamma_F}{3t}$$

ist, nimmt die Bedingung (2) $\gamma(v_t - V_t) = d\Gamma_F/dt$ die Form an

$$\gamma_\zeta \left(w_t \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 - \frac{\zeta_t}{3t}\right) = \frac{\Gamma_F}{3t}. \tag{7}$$

Es kommt nun darauf an, Form und Belegungsdichte der Unstetigkeitsfläche zu einer beliebigen Zeit so zu bestimmen, daß (6) und (7) erfüllt sind und daß ferner $w(0) = 0$, wenn anders die Geschwindigkeit an der Plattenkante (in der z-Ebene) endlich bleiben soll.

b) Genäherte Berechnung der Unstetigkeitsfläche. Wie *Kaden*[1] und für den vorliegenden Fall *Anton* gezeigt haben, nehmen die inneren Spiralwindungen der Unstetigkeitsfläche immer mehr die Form konzentrischer Kreise um den Spiralmittelpunkt an, und zwar gilt mit Polarkoordinaten (r, φ) um den Mittelpunkt der Spirale in der z-Ebene)

$$r \approx \left(\frac{\varkappa t}{\pi \varphi}\right)^{2/3}, \qquad \Gamma = 2\varkappa\sqrt{r}$$

mit noch näher zu bestimmender Konstante $\varkappa$.

Die Wirkung des Spiralkerns mit der Zirkulation Γ_S auf die äußeren Teile der Windung kann deshalb näherungsweise ersetzt werden durch die Wirkung eines punktförmigen Wirbels mit der gleichen Zirkulation im Mittelpunkt der Spirale (z_S). In diesem Sinne wird die wirkliche Unstetigkeitsfläche ersetzt durch eine äußere Windung (etwa durch den ersten Umlauf der Spirale gegeben) und einen Wirbelpunkt der Zirkulation Γ_S an der Stelle z_S (bzw. ζ_S in der ζ-Ebene), und es wird verlangt, daß die Bedingungen (6) und (7) auf der Außenwindung erfüllt sind, während für den Wirbelpunkt gelten soll

$$v(z_S) = \frac{dz_S}{dt} = \frac{2\,z_S}{3t},$$

d. h. die Geschwindigkeit, mit der sich der Mittelpunkt der Spirale auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze bewegt, muß übereinstimmen mit der Strömungsgeschwindigkeit an dieser Stelle. In Abb. 4 und 5 sind schematisch Außenwindung und Lage des Zentralwirbels (Γ_S) in der z- und ζ-Ebene dargestellt.

[1] *H. Kaden*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 140.

Im folgenden wurde ein Näherungsverfahren angewandt, das von dem *Anton*schen verschieden ist und deshalb ausführlicher beschrieben werden soll.

In einer nullten, groben Näherung wird das von der Wirbelfläche erzeugte Geschwindigkeitsfeld durch das Geschwindigkeitsfeld eines einzelnen Punktwirbels angenähert, der im Mittelpunkt der Spirale zu denken ist. In der ζ-Ebene hat man dann ein Geschwindigkeitsfeld, das sich zusammen-

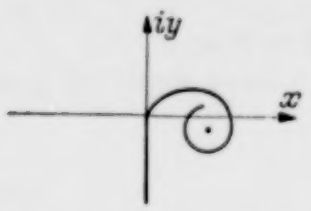

Abb. 4. Außenwindung und Zentralwirbel in der z-Ebene.

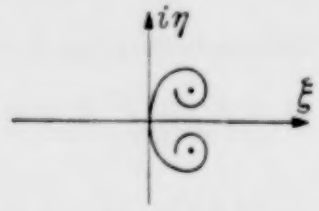

Abb. 5. Außenwindung und Zentralwirbel in der ζ-Ebene.

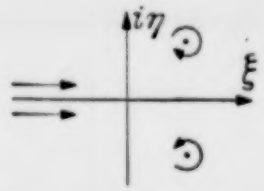

Abb. 6. Zentralwirbel und Spiegelbild in der ζ-Ebene.

setzt aus der Grundströmung ($w_\xi = v_1$, $w_\eta = 0$) und den durch einen Potentialwirbel und dessen Spiegelbild erzeugten Geschwindigkeiten (Abb. 6).

Das komplexe Potential des Potentialwirbels ist nun

$$F = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i} \ln\left(\frac{\zeta - \zeta_S}{H_1}\right)$$

und mit der Abbildungsfunktion (3) $\zeta = \sqrt{2\, i\, H_1\, z}$, $\zeta_S = \sqrt{2\, i\, H_1\, z_S}$

$$F = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i} \ln\left(\sqrt{2\, i\, z/H_1} - \sqrt{2\, i\, z_S/H_1}\right) = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\left[\ln 2\, i\left(\frac{z - z_S}{H_1}\right) - \ln\left(\sqrt{2\, i\, z/H_1} + \sqrt{2\, i\, z_S/H_1}\right)\right],$$

woraus sich für die Geschwindigkeit ergibt

$$\bar{v}(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\left[\frac{1}{z - z_S} - \left(\frac{1}{\sqrt{2\, i\, z} + \sqrt{2\, i\, z_S}}\right)\frac{i}{\sqrt{2\, i\, z}}\right].$$

Während der erste Term ($\Gamma_\infty/2\pi i \cdot 1/(z - z_S)$) dem Wirbel (im Punkt z_S) keine Geschwindigkeit erteilt, liefert der zweite, mit $z \to z_S$

$$-\frac{\Gamma_\infty}{2\pi i}\frac{1}{4\, z_S} = -\frac{\Gamma_\infty}{2\pi}\frac{H_1}{2\,\zeta_S^2}.$$

Dazu kommt noch die durch die Grundströmung und das Spiegelbild erzeugte Geschwindigkeit. Diese ist in der ζ-Ebene

$$\bar{w} = v_1 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\, 2\, \eta_S},$$

in der z-Ebene

$$\bar{v} = \bar{w}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z_S} = \left(v_1 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\, 2\, \eta_S}\right)\frac{i\, H_1}{\zeta_S}.$$

Insgesamt ist also

$$\bar{v}(z_S) = \left[-\frac{\Gamma_\infty}{2\pi}\frac{1}{2\,\zeta_S^2} + i\left(v_1 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\, 2\, \eta_S}\right)\frac{1}{\zeta_S}\right] H_1$$

bzw.

$$v(z_S) = \left[-\frac{\Gamma_\infty}{2\pi}\frac{1}{2\,\bar{\zeta}_S^2} - i\left(v_1 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\, 2\, \eta_S}\right)\frac{1}{\bar{\zeta}_S}\right] H_1.$$

Nun soll sein $v(z_S) = dz_S/dt$, woraus für $d\zeta_S/dt$ folgt

$$\frac{d\zeta_S}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z_S}\frac{dz_S}{dt} = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z_S} v(z_S) = \left[-\frac{\Gamma_\infty}{2\pi}\frac{i\,\zeta_S}{2\,|\zeta_S|^4} + \left(v_1 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\, 2\, \eta_S}\right)\frac{1}{|\zeta_S|^2}\right] H_1^2.$$

Die Geschwindigkeit im Nullpunkt der ζ-Ebene ist

$$w(0) = \left(v_1 + \frac{2\,\Gamma_\infty\,\eta_S}{2\pi\,|\zeta_S|^2}\right).$$

Damit diese Null wird, muß sein

$$-\frac{\Gamma_\infty}{2\pi} = \frac{|\zeta_S|^2}{2\,\eta_S}\,v_1\,. \tag{8}$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\frac{d\zeta_S}{dt} = \left[\frac{i\,\zeta_S}{4\,\eta_S\,|\zeta_S|^2} + \left(1 - \frac{|\zeta_S|^2}{4\,\eta_S^2}\right)\frac{1}{|\zeta_S|^2}\right] v_1\,H_1^2\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $\zeta_S = 0$ für $t = 0$ ist

$$\zeta_S = H_1\left(\frac{3}{8}\,\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{1/3}(1+i)$$

oder

$$\zeta_S = H_1\left(\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{1/3}(0{,}72 + 0{,}72\,i)\,.$$

Für die Lage des Punktwirbels in der z-Ebene, die auf Grund Gleichung (3) $z_S = \zeta_S^2/2\,i\,H_1$ ist, und für dessen Zirkulation, die nach (8) $-\Gamma_\infty/2\pi = (|\zeta_S|^2/2\,\eta_S)\,v_1$ ist, erhält man hieraus

$$z_S = H_1\left(\frac{3}{8}\,\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{2/3} = H_1\left(\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{2/3}\cdot 0{,}52\,, \qquad -\frac{\Gamma_\infty}{2\pi} = v_1\,H_1\left(\frac{3}{8}\,\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{1/3} = v_1\,H_1\left(\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{1/3}\cdot 0{,}72\,.$$

Diese nullte Näherung ist bereits ziemlich gut. In dritter und letzter Näherung ergibt sich z. B. für die Lage des Zentralwirbels in der ζ-Ebene

$$\frac{\zeta_S}{H_1} = \left(\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{1/3}(0{,}73 + i\cdot 0{,}56)$$

sowie für die Gesamtzirkulation der Unstetigkeitsfläche

$$\frac{-\Gamma_\infty}{2\pi\,v_1\,H_1} = \left(\frac{v_1\,t}{H_1}\right)^{1/3}\cdot 0{,}635\,.$$

Das durch die Grundströmung v_1 sowie durch den Punktwirbel und dessen Spiegelbild erzeugte Geschwindigkeitsfeld in der ζ-Ebene ist

$$\overline{w} = v_1 + \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\,i}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_S} - \frac{1}{\zeta-\overline{\zeta}_S}\right).$$

Dieses Geschwindigkeitsfeld der nullten Näherung wird nun in erster Näherung beibehalten und eine Unstetigkeitsfläche zur Zeit $t = 8/3\,(H_1/v_1)$ konstruiert, auf der die Bedingung (6) $w_n\,|d\zeta/dz|^2 = \zeta_n/3\,t$ mit einer Normalgeschwindigkeit w_n aus der nullten Näherung überall erfüllt ist.

Zur Zeit $t = 8/3\,(H_1/v_1)$ ist $\zeta_S/H_1 = (1+i)$ und $-\Gamma_\infty/2\pi = v_1\,H_1$ und das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\overline{w}}{v_1} = 1 + \frac{i}{\zeta/H_1 - (1+i)} - \frac{i}{\zeta/H_1 - (1-i)}\,.$$

Nun ist

$$w_n = w_\eta\,\frac{d\xi}{ds} - w_\xi\,\frac{d\eta}{ds}\,, \qquad \zeta_n = \eta\,\frac{d\xi}{ds} - \xi\,\frac{d\eta}{ds}\,.$$

Aus

$$w_n\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \frac{\zeta_n}{3\,t} = \frac{v_1}{8}\,\frac{\zeta_n}{H_1}$$

und

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \left|\frac{H_1}{\zeta}\right|^2$$

folgt

$$\frac{w_n}{v_1}\left|\frac{H_1}{\zeta}\right|^2 = \frac{1}{8}\,\frac{\zeta_n}{H_1}\,. \tag{9}$$

Die mit v_1 bzw. H_1 dimensionslos gemachten Größen

$$\frac{\overline{w}}{v_1} = \frac{w_\xi}{v_1} - i\,\frac{w_\eta}{v_1} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\overline{\zeta}}{H_1} = \frac{\xi}{H_1} - i\,\frac{\eta}{H_1}$$

seien im folgenden der Einfachheit halber mit

$$\overline{w'} = w'_\xi - i\, w'_\eta := \frac{\overline{w}}{v_1} \qquad \text{sowie} \qquad \overline{\zeta'} = \xi' - i\, \eta' = \frac{\overline{\zeta}}{H_1}$$

bezeichnet. Desgleichen sei

$$w'_n = \frac{w_n}{v_1}, \qquad w'_t = \frac{w_t}{v_1}, \qquad \zeta'_n = \frac{\zeta_n}{H_1}, \qquad \zeta'_t = \frac{\zeta_t}{H_1} \qquad \text{und} \qquad s' = \frac{s}{H_1}.$$

Gleichung (9) lautet dann

$$w'_n \frac{1}{|\zeta'|^2} = \frac{1}{8}\, \zeta'_n$$

oder mit

$$w'_n = w'_\eta \frac{d\xi'}{ds'} - w'_\xi \frac{d\eta'}{ds'}$$

und $\zeta'_n = \eta' \dfrac{d\xi'}{ds'} - \xi' \dfrac{d\eta'}{ds'}$

$$\left(w'_\eta \frac{d\xi'}{ds'} - w'_\xi \frac{d\eta'}{ds'}\right) \frac{1}{\xi'^2 + \eta'^2} = \frac{1}{8}\left(\eta' \frac{d\xi'}{ds'} - \xi' \frac{d\eta'}{ds'}\right). \tag{10}$$

Ferner gilt

$$\left(\frac{d\xi'}{ds'}\right)^2 + \left(\frac{d\eta'}{ds'}\right)^2 = 1\,. \tag{11}$$

Dies sind zwei Differentialgleichungen für die dimensionslosen Koordinaten $\xi'(s')$, $\eta'(s')$ der Außenwindung. Die Gleichungen wurden mit der Anfangsbedingung $\xi'(0) = \eta'(0) = 0$ im Bereich der Außenwindung graphisch gelöst.

Nun bestimmt man für die so gewonnene Außenwindung in erster Näherung eine Belegungsdichte γ_ζ aus der Bedingung (7)

$$\gamma_\zeta \left(w_t \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 - \frac{\zeta_t}{3\,t}\right) = \frac{\Gamma_F}{3\,t}$$

mit einem w_t aus der nullten Näherung. $\Gamma_F = \Gamma_F(s)$ war erklärt als Zirkulation um das freie Ende der Unstetigkeitsfläche

$$\left(\Gamma_F(s) = \int_s^\infty \gamma_\zeta\, ds\right).$$

Wenn nun letztere, im Sinne der gemachten Näherungsannahme, zerlegt ist in eine Außenwindung (deren Länge s_0 sei) und einen Zentralwirbel, so bedeutet Γ_F jetzt natürlich die Zirkulation um das freie Ende der Außenwindung plus die Zirkulation Γ_S des Zentralwirbels

$$\left(\Gamma_F(s) = \int_s^{s_0} \gamma_\zeta\, ds + \Gamma_S\right).$$

Sei ferner

$$\Gamma = \Gamma(s) = \int_0^s \gamma_\zeta\, ds$$

und Γ_∞ die Gesamtzirkulation; so ist also

$$(\Gamma + \Gamma_F) = \Gamma_\infty \qquad \text{oder} \qquad \Gamma_F = (\Gamma_\infty - \Gamma)\,.$$

Nun erhält man aus (7) mit $\Gamma_F = (\Gamma_\infty - \Gamma)$ sowie mit $\gamma_\zeta = d\Gamma/ds$

$$\frac{\dfrac{d\Gamma}{ds}}{\Gamma_\infty - \Gamma} = \frac{1}{3\,t\,w_t\,|d\zeta/dz|^2 - \zeta_t} = -\frac{d}{ds} \ln\,(1 - \Gamma/\Gamma_\infty)\,.$$

Für

$$t = \frac{8}{3}\,\frac{H_1}{v_1}$$

erhält man hieraus, wenn man noch die oben definierten dimensionslosen Größen einführt,

$$-\frac{d}{ds'} \ln\,(1 - \Gamma/\Gamma_\infty) = \frac{1}{\dfrac{8\,w'_t}{|\zeta'|^2} - \zeta'_-}\,.$$

Dieses integriert ergibt

$$\ln\left(1-\frac{\Gamma(s')}{\Gamma_\infty}\right)=-\int_0^{s'}\frac{ds'}{\frac{8\,w_t'}{|\zeta'|^2}-\zeta_t'}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{\Gamma(s')}{\Gamma_\infty}=1-e^{-\int_0^{s'}\frac{ds'}{\frac{8\,w_t'}{|\zeta'|^2}-\zeta_t'}}\,. \tag{12}$$

Zweckmäßigerweise führt man hier eine dimensionslose Zirkulation

$$\Gamma'=\frac{\Gamma}{v_1 H_1}$$

ein. Ebenfalls sei

$$\frac{\Gamma_\infty}{v_1 H_1}=\Gamma_\infty'$$

sowie die dimensionslose Belegungsdichte der Zirkulation

$$\gamma_\zeta'=\frac{\gamma_\zeta}{v_1}=\frac{1}{v_1}\frac{d\Gamma}{ds}=\frac{d\Gamma'}{ds'}\,.$$

Gleichung (12) lautet dann auch

$$\frac{\Gamma'(s')}{\Gamma_\infty'}=1-e^{-\int_0^{s'}\frac{ds'}{\frac{8\,w_t'}{|\zeta'|^2}-\zeta_t'}}\,. \tag{13}$$

Durch Differentiation von Gleichung (13) nach s' erhält man für die Belegungsdichte

$$\gamma_\zeta'(s')=\frac{\Gamma_\infty'}{\frac{8\,w_t'}{|\zeta'|^2}-\zeta_t'}\cdot e^{-\int_0^{s'}\frac{ds'}{\frac{8\,w_t'}{|\zeta'|^2}-\zeta_t'}}\,. \tag{14}$$

Die Zirkulation des Zentralwirbels ist $\Gamma_S=\Gamma_\infty-\Gamma(s_0)$ oder in dimensionsloser Form

$$\frac{\Gamma_S}{v_1 H_1}=\Gamma_S'=(\Gamma_\infty'-\Gamma'(s_0'))=\Gamma_\infty' e^{-\int_0^{s_0'}\frac{ds'}{\frac{8\,w'}{|\zeta'|^2}-\zeta_t'}} \tag{15}$$

mit $s_0'=s_0/H_1$.

Nach (14) und (15) kann die Belegungsdichte der Außenwindung und die Zirkulation des Zentralwirbels bis auf den Faktor Γ_∞' berechnet werden. Damit können auch die von der Außenwindung und dem Zentralwirbel sowie deren Spiegelbildern erzeugten Störgeschwindigkeiten in der ζ'-Ebene bis auf den Faktor Γ_∞' berechnet werden. Für die Gesamtgeschwindigkeit, die sich aus der Grundströmung und den Störgeschwindigkeiten zusammensetzt, erhält man in dimensionsloser Darstellung

$$\frac{\overline{w}}{v_1}=\overline{w}'(\zeta')=1+\frac{\Gamma_S'}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta'-\zeta_S'}-\frac{1}{\zeta'-\overline{\zeta}_S'}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-s_0'}^{s_0'}\frac{\gamma_\zeta'(s')}{\zeta'-\zeta'(s')}\,ds'\,. \tag{16}$$

Dabei ist $\gamma_\zeta'(-s')=-\gamma_\zeta'(s')$. Die Werte $\gamma_\zeta'(s')$ und Γ_S' sind durch (14) und (15) bis auf den Faktor Γ_∞' gegeben. Der Faktor Γ_∞', d. h. die Gesamtzirkulation, wird nun bestimmt durch die Forderung $\overline{w}'(0)=0$, d. h. durch die Forderung, daß die Geschwindigkeit an der Plattenkante (in der z-Ebene) endlich bleiben soll. Damit ist endgültig Form und Belegungsdichte der Außenwindung sowie Lage und Stärke des Zentralwirbels in erster Näherung festgelegt.

Für die Berechnung der zweiten Näherung wird jetzt das von der ersten Näherung erzeugte Geschwindigkeitsfeld (16) anstelle des vom Zentralwirbel allein erzeugten verwandt und mit (10) und (11) eine neue Außenwindung konstruiert. Die neue Lage des Zentralwirbels ζ_S (bzw. z_S in der z-Ebene ergibt sich wieder aus der Forderung

$$v(z_S) = \frac{dz_S}{dt} = \frac{2\,z_S}{3\,t}$$

mit einer Strömungsgeschwindigkeit $v(z_S)$ aus der ersten Näherung.

Danach wird, ebenso wie bei der ersten Näherung, die Belegungsdichte der Außenwindung und die Zirkulation des Zentralwirbels in zweiter Näherung bis auf den Faktor Γ'_∞ sowie Γ'_∞ aus der Forderung $\overline{w}(0) = 0$ bestimmt usw.

Die dritte Näherung, die im Rahmen der Zeichengenauigkeit fast vollkommen mit der zweiten Näherung übereinstimmt, wird endgültig beibehalten und noch in die z-Ebene übertragen auf Grund der Beziehungen

$$\zeta = \sqrt{2\,i\,H_1\,z}\,, \qquad \gamma = \gamma_\zeta \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|.$$

Abb. 7 zeigt die erste bis dritte Näherung der Unstetigkeitsfläche in der ζ-Ebene. Die Abb. 8 und 9 zeigen Form und Wirbelbelegung der ähnlich veränderlichen Unstetigkeitsfläche in der z-Ebene zur Zeit $v_1 \cdot t/H_1 = 1$. Für beliebige Zeiten ergeben sich Form und Belegungsdichte sowie Gesamtzirkulation der Unstetigkeitsfläche aus den Ähnlichkeitsgesetzen

$$\frac{z}{z_1} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{2/3}, \qquad \frac{\gamma}{\gamma_1} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-1/3}, \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma_1} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{1/3}.$$

3. Theorie der endlich breiten Platte. Die Anfangsströmung um die Platte der Breite $2\,H$ war durch das Potential $F = v_\infty \sqrt{2\,i\,H\,z + z^2}$ mit $v_\infty \sqrt{H} = v_1 \sqrt{H_1}$ gegeben. In der Umgebung der oberen Plattenkante, d. h. für $|z| \ll H$ stimmt diese Strömung mit der an der Kante der unendlich

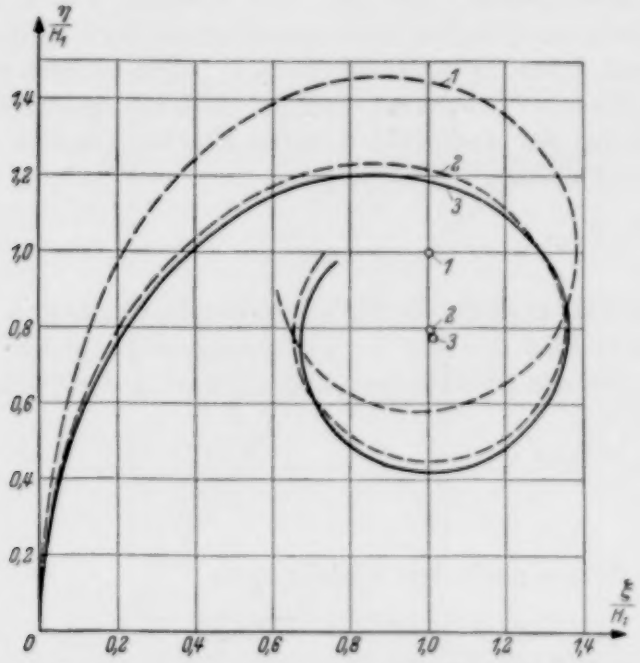

Abb. 7. Ähnlich veränderliche Unstetigkeitsfläche in erster, zweiter und dritter Näherung in der ζ-Ebene ($v_1\,t/H_1 = 8/3$)

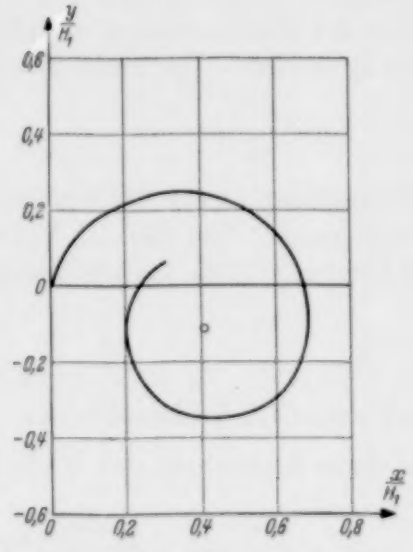

Abb. 8. Ähnlich veränderliche Unstetigkeitsfläche in der z-Ebene für $v_1\,t/H_1 = 1$.

	nullte Nähg.	erste Nähg.	zweite Nähg.	dritte Nähg.
$\frac{-\Gamma_\infty}{v_1 H_1 2\pi}$	1,00	0,83	0,852	0,867

breiten Platte überein. Aus diesem Grund stimmen auch Form und Belegung der von der Kante auslaufenden Unstetigkeitsfläche in beiden Fällen überein, solange die Wirbel noch sehr klein gegenüber der Plattenbreite sind. Die Übereinstimmung der beiden Strömungsformen hängt nun offenbar nur davon ab, daß $v_\infty \sqrt{H} = v_1 \sqrt{H_1}$ ist, wobei die Länge H_1 auf der unendlich breiten Platte willkürlich vorgegeben werden kann. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei deshalb im folgenden

$H_1 = H$ und $v_1 = v_\infty$ gesetzt, ohne daß dies eine Einschränkung bedeutet. Die Platte, die durch das Stück $-2H < y < 0$ der y-Achse dargestellt wird (Abb. 10), wird durch die konforme Abbildung $\zeta = \xi + i\,\eta = \xi_0 \sqrt{2\,i\,z/H + z^2/H^2}$ auf das Stück $-\xi_0 < \xi < +\xi_0$ der ξ-Achse abgebildet. Die Symmetrieachse der Strömung, nämlich die Gerade $z = -iH + x$, geht in die Abschnitte $\xi < -\xi_0$ für $x < 0$ und $\xi > +\xi_0$ für $x > 0$ über. Zwei Punkte, die zur Achse $z = -iH + x$ symmetrisch liegen, gehen in solche über, die zur ξ-Achse symmetrisch sind, d. h. wenn das Strömungsfeld in der ζ-Ebene zur ξ-Achse symmetrisch ist, so ist es in der z-Ebene zur Achse

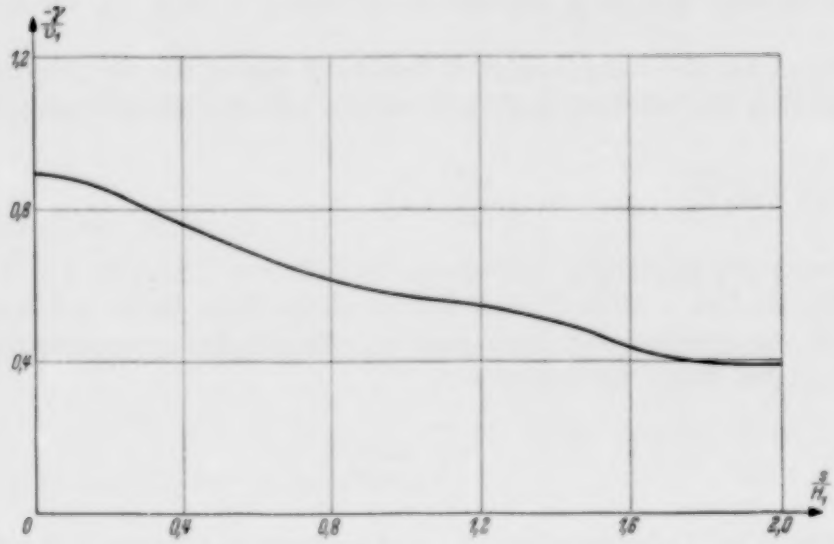

Abb. 9. Belegungsdichte der Zirkulation γ/v_1 als Funktion der Bogenlänge s/H_1 in der z-Ebene für $v_1\,t/H_1 = 1$.
— $(1/v_1 \cdot H_1)\,\Gamma_\infty = 3{,}95$ (Gesamtzirkulation),
— $(1/v_1 \cdot H_1)\,\Gamma_S = 2{,}70$ (Zirkulation des Zentralwirbels).

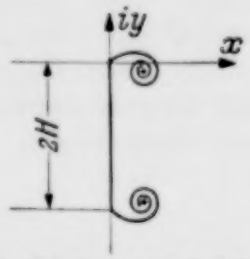

Abb. 10. Spiralförmige Unstetigkeitsfläche an den Kanten der endlich breiten Platte.

$= -iH + x$ symmetrisch. Die Bilder der Wirbelflächen, die von den Kanten $z = 0$ und $z = -2\,i\,H$ ausgehen, liegen also jetzt symmetrisch zur ξ-Achse und entsprechen dem Bild der einen Wirbelfläche der unendlich breiten Platte und deren Spiegelbild (Abb. 3). Die an sich willkürlich wählbare Länge ξ_0 wird nun zweckmäßigerweise so bestimmt, daß der Abbildungsmaßstab in der Nähe der Plattenkanten der gleiche ist, wie bei der unendlich breiten Platte. Dies ist der Fall, wenn $\xi_0 = H$ ist. Die Abbildungsfunktion wird damit

$$\zeta = \sqrt{2\,i\,H\,z + z^2}\,. \tag{17}$$

Bei Verwendung dieses Abbildungsmaßstabes erhält man für den Anfang der Bewegung in der ζ-Ebene das gleiche Bild für die Unstetigkeitsfläche und das gleiche Strömungsbild wie bei der unendlich breiten Platte. Insbesondere erhält man für die Anströmgeschwindigkeit in der ζ-Ebene

$$\frac{dF}{d\zeta} = v_\infty = v_1\,,$$

wie bei der unendlich breiten Platte.

Das zeitliche Anwachsen der Wirbel erfolgt wie früher nach den Gleichungen

$$w_n \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_n, \qquad \gamma_\zeta\, w_t \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}\,,$$

($\partial\Gamma/\partial t$ jetzt aber genommen an Punkten, die durch senkrechte Verschiebung auseinander hervorgehen; w_n, w_t, γ_ζ sind die Geschwindigkeiten bzw. Wirbelbelegung in der ζ-Ebene). Nur ist jetzt mit $\zeta = \sqrt{2\,i\,H\,z + z^2}$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \sqrt{1 - \left(\frac{H}{\zeta}\right)^2}\,, \tag{18}$$

was für kleine ζ-Werte übergeht in $i\,H/\zeta$.

Man bekommt also zunächst eine Abweichung vom ähnlichen Wachstum dadurch, daß $d\zeta/dz$ mit wachsendem ζ mehr und mehr von $i\,H/\zeta$ in $\sqrt{1 - (H/\zeta)^2}$ übergeht. Dann wird man als Folge hiervon auch Abweichungen von w_n, w_t erhalten.

Für die Weiterverfolgung der Lösung bei der endlich breiten Platte wurde die Unstetigkeitsfläche für $v_\infty\, t/H = 0{,}1$ (zu welcher Zeit die Abweichungen vom ähnlichen Wachstum noch äußerst gering sind) als Ausgangszustand genommen.

Die Gestalt der Unstetigkeitsfläche zu einer Zeit $t + \Delta t$ (mit nicht zu großem Δt) ergibt sich aus der Gestalt zur Zeit t durch Verschiebungen um

$$\Delta\zeta_n = w_n \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 \Delta t \qquad \text{(in der } \zeta\text{-Ebene).}$$

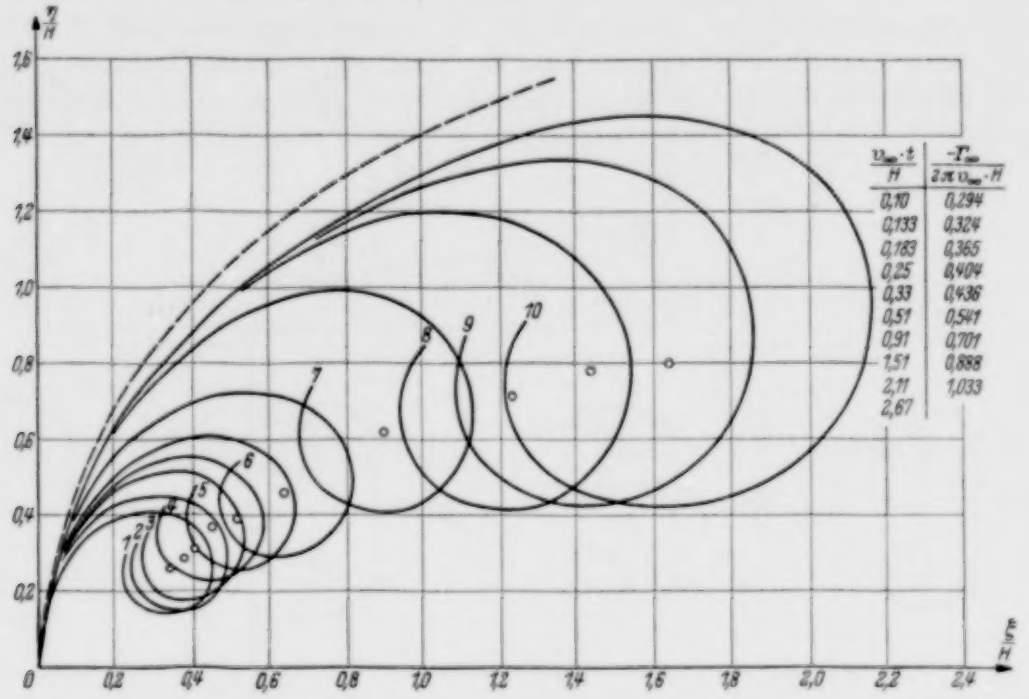

Abb. 11. Unstetigkeitsflächen in der ζ-Ebene. Gestrichelt: Bild der *Helmholtz*schen Unstetigkeitsfläche.

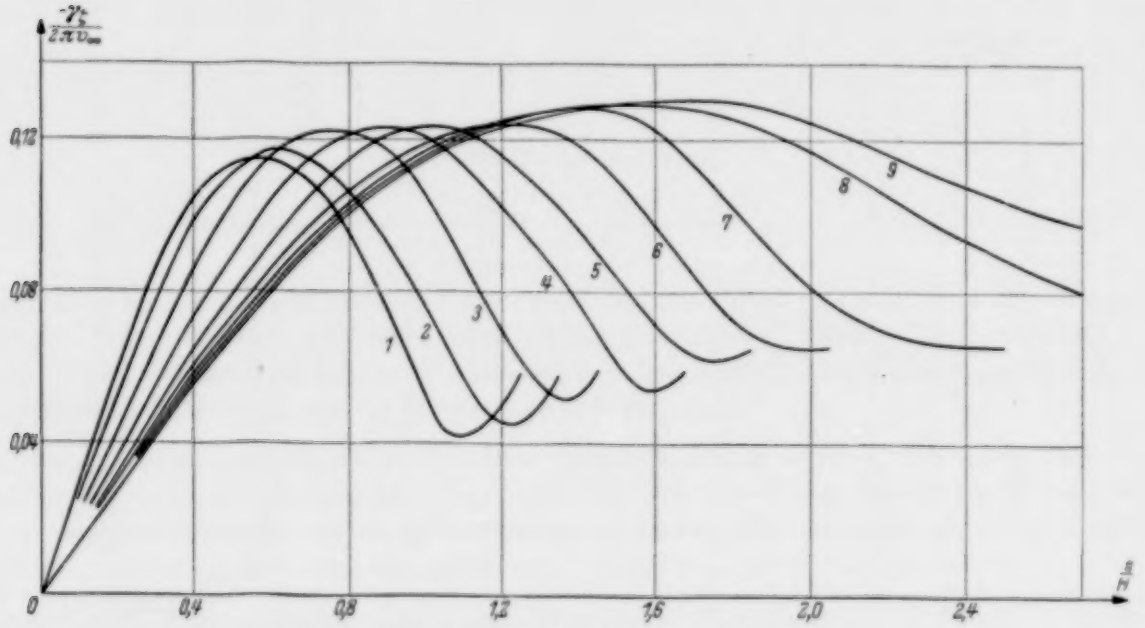

Abb. 12. Belegungsdichten der Zirkulation in der ζ-Ebene.

Ebenso ist für einen Abschnitt der Unstetigkeitsfläche zur Zeit $t + \Delta t$, der aus einem Abschnitt zur Zeit t durch senkrechte Verschiebung hervorgegangen ist,

$$\Gamma_F(t + \Delta t) = \Gamma_F(t) + \gamma_\zeta\, w_i \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2 \Delta t\,,$$

woraus man $\gamma_\zeta(t + \Delta t)$ bestimmen kann. Dann berechnet man wieder die Geschwindigkeiten $w(t + \Delta t)$ (mit Hilfe graphischer Integration) usw. Auf diese Weise wurde im Verlauf von zehn Verschiebungen die Entwicklung der Unstetigkeitsfläche bis zur Zeit $v_\infty\, t/H = 8/3$ verfolgt. Die graphischen Darstellungen Abb. 11 und 12 zeigen die verschiedenen Stadien der Wirbelfläche und

der Belegungsdichte in der ζ-Ebene sowie Abb. 13 acht dazwischen interpolierte Zustände mit gleichmäßigen Zeitabständen $v_\infty \, \Delta t/H = 1/3$ in der z-Ebene. Die Gesamtzirkulation der Unstetigkeitsfläche ist in Abb. 14 in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Zum Vergleich ist in Abb. 14 die Zirkulation bei ähnlich veränderlicher Unstetigkeitsfläche mit eingezeichnet.

Es zeigt sich, daß der Anfang der Unstetigkeitsfläche mit fortschreitender Zeit mehr und mehr in den Anfang der *Helmholtz*schen Unstetigkeitsfläche asymptotisch übergeht (Abb. 11). Vermutlich stellte letztere auch den Endzustand dar, wenn die Strömung nicht vorher instabil würde.

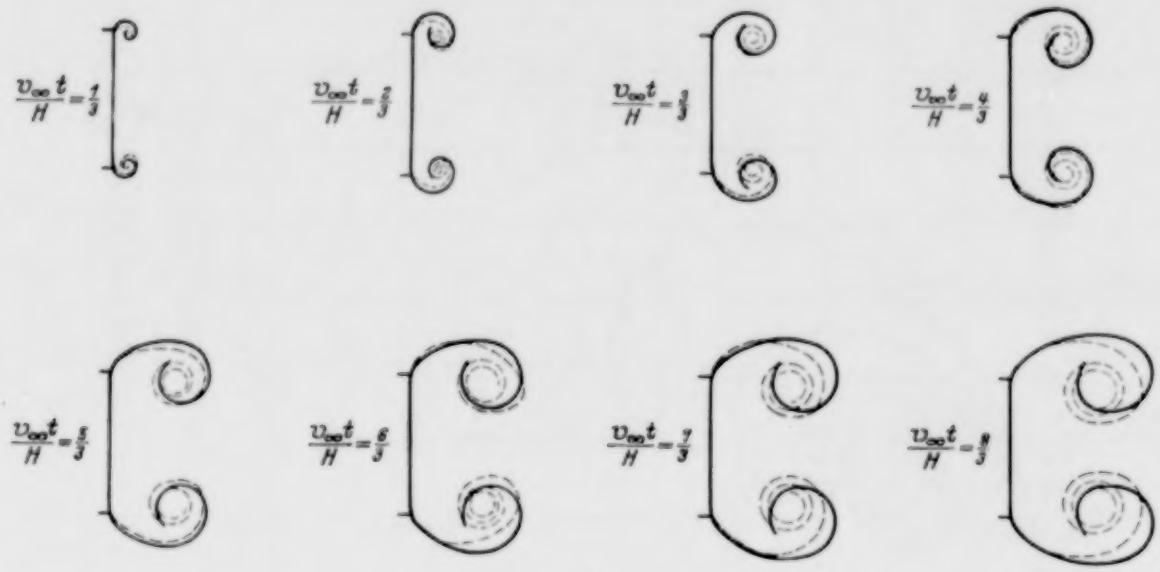
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{1}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{2}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{3}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{4}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{5}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{6}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{7}{3}$
$\frac{v_\infty t}{H} = \frac{8}{3}$

Abb. 13. Unstetigkeitsflächen an den Plattenkanten (ausgezogen: theoretisch; gestrichelt: experimentell).

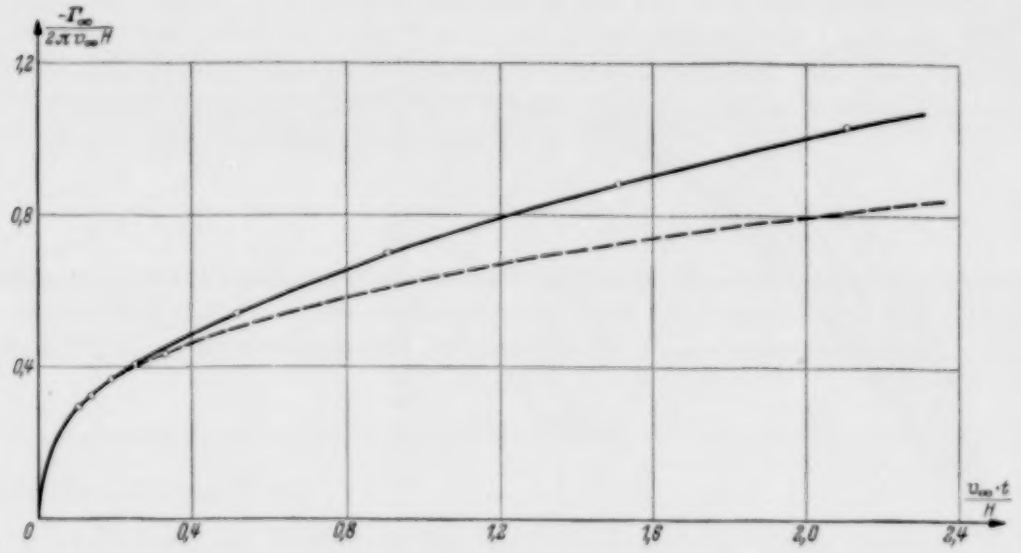

Abb. 14. Gesamtzirkulation der Unstetigkeitsfläche bei unendlich breiter und endlich breiter Platte als Funktion der Zeit

$$\left(\text{gestrichelt: } \frac{-\Gamma_\infty}{2\pi v_\infty \cdot H} = 0{,}635 \left(\frac{v_\infty t}{H}\right)^{1/3}. \right)$$

4. Experimentelle Prüfung und Erläuterung der Versuchseinrichtung. Die im Vorhergehenden behandelte Strömungsform, nach welcher die Platte von der Zeit $t = 0$ ab mit konstanter Geschwindigkeit v_∞ angeströmt wird, läßt sich schwer im Strömungskanal ausführen. Die Platte müßte dann schon sehr schnell in den Kanal geschoben werden, wobei wohl Störungen mit in die Strömung kämen.

Man erhält die gleiche Strömungsform (vom Standpunkt eines mit der Platte mitbewegten Beobachters), wenn man umgekehrt die Platte durch die ruhende Flüssigkeit zieht. In diesem Fall

hat man die zunächst ruhende Platte zur Zeit $t = 0$ augenblicklich auf eine alsdann konstant bleibende Geschwindigkeit zu bringen. Das ist genau genommen natürlich unmöglich. Trotz der damit verbundenen Bedenken wurde dennoch dieser Weg gegangen, wobei die Abmessungen der Apparatur so gehalten waren, daß die Beschleunigungsstrecke kurz gegen die erste Beobachtungsstrecke blieb.

Abb. 15 zeigt eine Skizze der Versuchseinrichtung. Zwischen zwei Gleitschienen *G* ist ein Schlitten *S* aufgehängt. Mit Hilfe eines Bandes *B*, das ein Motor *M* langsam auf eine Rolle *R* aufwiecklt, wird der Schlitten in Pfeilrichtung gezogen. An der Rückseite des Schlittens ist eine 6 cm breite Platte *P* montiert, die bis dicht über den Boden in ein wassergefülltes Bassin eintaucht (Eintauchtiefe 36 cm). Dadurch ist eine nahezu zweidimensionale Strömung um die Platte gewährleistet. Unter dem Schlitten ist ein Photoapparat *Ph* aufgehängt, dessen Objektiv sich dicht über der

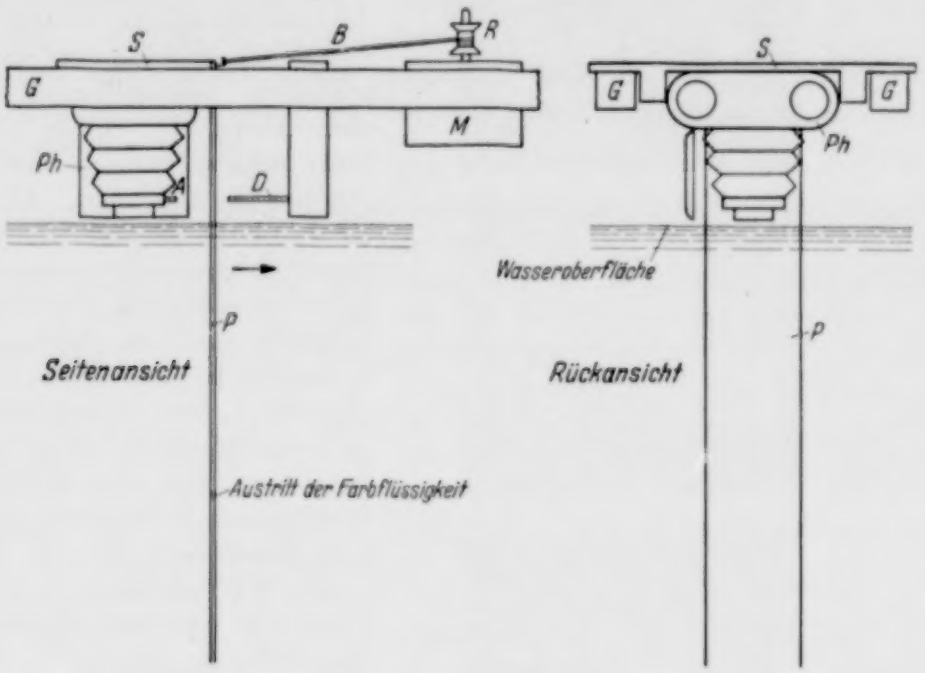

Abb. 15. Versuchseinrichtung.

Wasseroberfläche befindet. Bei Annäherung des Schlittens an den Dorn *D* stößt letzterer durch ein Loch in der Platte auf den Auslöser *A* des Photoapparates. Zu halber Eintauchtiefe tritt nach Öffnen eines Regulierhahnes an beiden Plattenkanten eine Farbflüssigkeit aus, die durch ein Röhrchen an der Plattenvorderseite herab bis dorthin geleitet wird.

Die an den Kanten vorbeistreichenden Flüssigkeitsteilchen werden also eben dort angefärbt, so daß die zu irgendeinem Zeitpunkt vorgefundene Farbverteilung Streichlinien darstellt. Diejenigen Streichlinien aber, die an den Plattenkanten vorbeiführen, markieren die Unstetigkeitsflächen selbst (genauer einen durch sie geführten Schnitt mit der Strömungsebene).

Die Gestalt der Wirbelflächen hängt (bei gegebener Plattenbreite $2H$) nur von der Größe $v_\infty t = l$ ab, wenn l die Strecke ist, die die Platte seit Bewegungsbeginn zurückgelegt hat. Die verschiedenen Strecken, die die Platte bis zur Auslösung der photographischen Aufnahme durchlaufen soll, sind durch Marken auf den Gleitschienen abgetragen.

Mit der geschilderten Versuchsanordnung ist es freilich nicht möglich, dieselbe Wirbelfläche in verschiedenen Stadien ihrer Entwicklung zu photographieren. Vielmehr muß für jedes weitere Stadium der ganze Vorgang von neuem eingeleitet werden. Auf diese Weise entstanden die beigefügten zehn Bilder (Abb. 16). Die auf der oberen rechten Bildecke notierte Zahl bedeutet die zum Zeitpunkt der Aufnahme von der Platte zurückgelegte Strecke $l = v_\infty t$ in Zentimetern. l läuft von 1 bis 10.

Die zugehörigen „dimensionslosen" Zeiten $v_\infty t/H$ sind (mit $H = 3$ cm) der Reihe nach 1/3, 2/3, . . . , 10/3. Für die gleichen Zeitpunkte, von 1/3 bis 8/3, wurden acht errechnete bzw. inter-

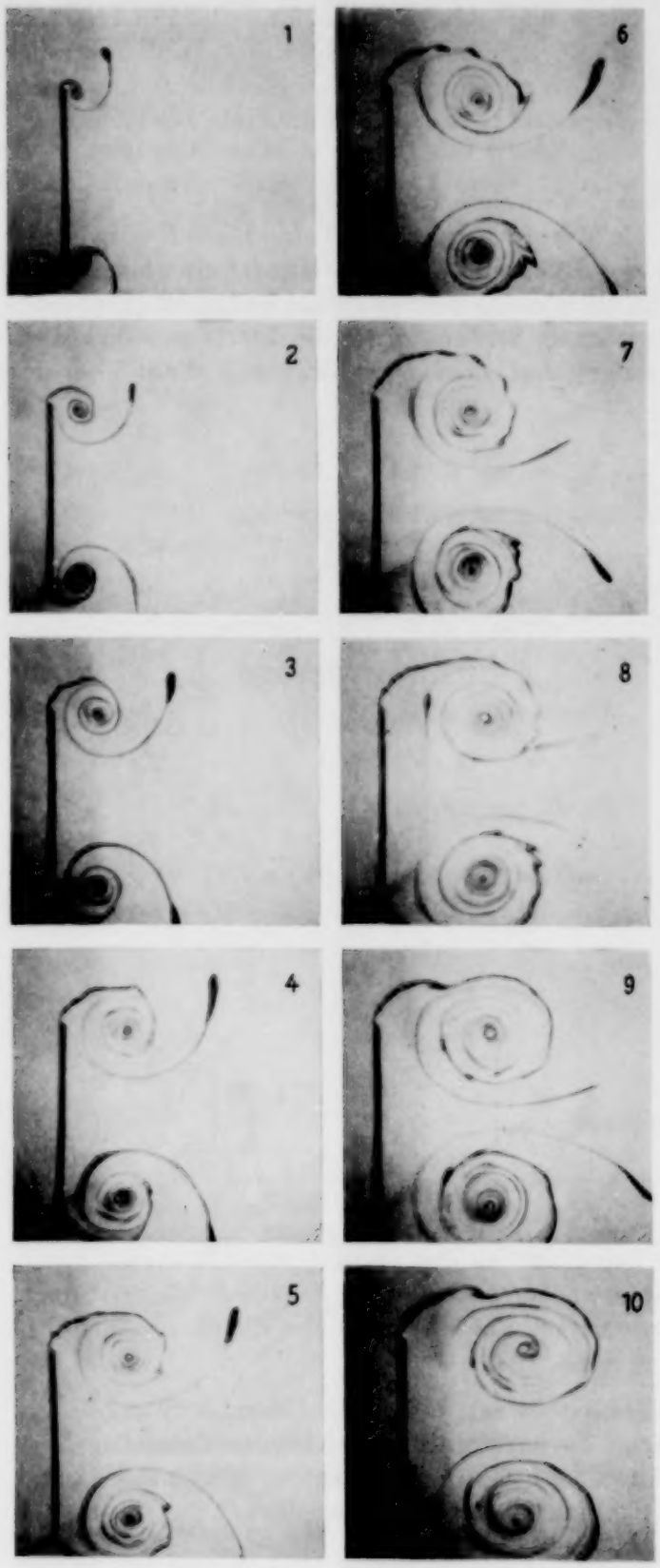

Abb. 16. Photographien der mittels Farbfaden sichtbar gemachten Unstetigkeitsflächen.

polierte Zustände der theoretischen Unstetigkeitsfläche im gleichen Maßstab dargestellt, was einen unmittelbaren Vergleich der Experimente mit dem theoretischen Resultat gestattet (Abb. 13). Für $v_\infty t/H \geq 6/3$ wird die Übereinstimmung merklich schlechter. Dies ist evtl. darauf zurückzuführen, daß die wirkliche Wirbelfläche allmählich instabil wird, worauf auch die photographischen Aufnahmen (Abb. 16) hindeuten.

5. Zusammenfassung und Schlußbemerkung. Die vorliegende Arbeit behandelt die Ausbildung eines symmetrischen Paares von Wirbelflächen an den Kanten einer senkrecht angeströmten Platte während einer Zeitdauer, in der diese Strömungsform möglicherweise noch als stabil angesehen werden darf. Als Ausgangspunkt hierzu dient die bereits von *Anton* durchgeführte hier aber nochmal auf andere Weise wiederholte Berechnung einer Wirbelfläche an der Kante einer einseitig unendlich breiten Platte. Als wesentliches Ergebnis ist hervorzuheben, daß die Wirbel sich von der endlich breiten Platte schneller entfernen und ihre Zirkulation schneller zunimmt als bei der unendlich breiten Platte und daß ferner die von der Platte abgehende Wirbelschicht sich in ihrer Form mehr und mehr der *Helmholtz*schen Unstetigkeitsfläche nähert.

Die anschließend durchgeführte experimentelle Prüfung zeigt im stabilen Bereich gute Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten. Die Frage nach dem Instabilwerden der Wirbelfläche wurde hier nicht näher untersucht und bleibt einer weiteren Behandlung des Problems überlassen. Bekanntlich wird die Strömung mit der Zeit unsymmetrisch; die Wirbel lösen sich dann abwechselnd von den Kanten ab, wo wieder neue entstehen und formieren sich zu einer Wirbelstraße, wie sie von *v. Kármán* beschrieben wurde.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor *Betz* für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Hinweise danken.

(Eingegangen am 25. Mai 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Phys. *E. Wedemeyer*, Göttingen, Bunsenstraße 10.

Zur Berechnung der Unterwassertragflügel bei wellenförmiger Anströmung

Von **W. H. Isay**

1. Einleitung. In zwei vorangehenden Arbeiten[1] habe ich Unterwassertragflügel als ebenes Strömungsproblem (unendliche Spannweite) behandelt. Und zwar enthält Arbeit I eine weitgehend vollständige Untersuchung des stationären Falles bei homogener Anströmung insbesondere auch für zwei hintereinander fahrende Tragflächen (Tragflügelbboot). Die Arbeit II enthält die Theorie eines Unterwassertragflügels bei instationärer, wellenförmiger Anströmung. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die Theorie der Arbeit II auch auf den Fall zweier hintereinander fahrenden Tragflächen ausgedehnt, und anschließend werden Zahlenbeispiele durchgerechnet und diskutiert. Dabei wird die Kenntnis der Arbeiten I und II vorausgesetzt, so daß wir uns hier teilweise etwas kürzer fassen können.

2. Zwei hintereinander fahrende Unterwassertragflügel. Bei der Behandlung des gleichen Problemes in stationärer Anströmung (vgl. Arbeit I, Ziff. 4 und 10) hat sich gezeigt, daß die Wirbel der hinteren Tragfläche *2* das Strömungsfeld an der vorderen Tragfläche *1* kaum noch beeinflussen (Abb. 1). Das liegt daran, daß weit vor den Tragflächen das von ihren Wirbeln induzierte Geschwindigkeitsfeld verschwindet; dieses gilt nach Formel (II, 15), (II, 16), (II, 22), (II, 23)

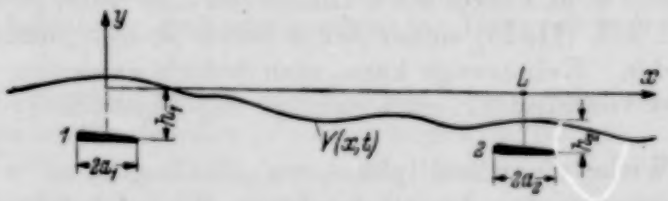

Abb. 1.

auch bei instationärer Anströmung. Wir werden deshalb das von den Wirbeln des hinteren Tragflügels induzierte Geschwindigkeitsfeld in der Randbedingung am vorderen Flügel vernachlässigen. Für die Randbedingung am Flügel *1* ist das Geschwindigkeitsfeld des Flügels *1* genau in der Form (II, 15), (II, 16), (II, 22), (II, 23) einzusetzen. Gemäß der in Arbeit II entwickelten Theorie wird angenommen, daß der Tragflügel sich in der mittleren Tiefe h_1 unter dem mittleren Wasseroberflächenniveau befindet. Dabei werden die instationären Tiefenschwankungen vernachlässigt, die durch die wellenförmige Wasseroberfläche und die Eigenbewegung des Flügels bedingt sind.

Für die Randbedingung am Flügel *2* muß dagegen das vom Flügel *1* induzierte Geschwindigkeitsfeld berücksichtigt werden. Aus der stationären Theorie der Arbeit I ist bekannt, daß durch den vorausfahrenden Flügel *1* die Wasseroberfläche in der Umgebung des Flügels *2* deformiert wird. Genau nach der Methode von Arbeit I, Ziff. **6b** werden wir auch jetzt den stationären Anteil dieser Deformation bei der Randbedingung am Flügel *2* berücksichtigen; d.h. der mittlere Abstand h_2 vom mittleren Oberflächenniveau muß entsprechend angepaßt werden. Vernachlässigt werden dagegen die Tiefenschwankungen, die durch die wellenförmige Wasseroberfläche sowie durch Tauch- und Stampfbewegungen des Flügels bedingt sind.[2]

Mit dem angepaßten h_2-Wert ist das Geschwindigkeitsfeld des Flügels *2* in die Randbedingung am Flügel *2* genau in der Form (II, 15), (II, 16), (II, 22), (II, 23) einzusetzen.

Wir haben ferner das vom Flügel *1* am Ort des Flügels *2* induzierte Geschwindigkeitsfeld zu berechnen. Dabei kann zunächst das Geschwindigkeitsfeld der gebundenen Wirbel des Flügels *1* am Ort des Flügels *2* ($-a_2 + L \leq x_2 \leq a_2 + L$) ohne weiteres aus (II, 15), (II, 16) entnommen

[1] *W. H. Isay*, Ing.-Arch. 27 (1959) S. 295; Arbeit I; Ing.-Arch. 29 (1960) S. 160; Arbeit II.

[2] Andernfalls würde die schon verwickelte Theorie noch wesentlich komplizierter. An Beispielen werden wir später sehen, daß für kleine Wellenamplituden die obige Vernachlässigung gerechtfertigt ist.

werden. In Anbetracht der großen in Frage kommenden x_2-Werte ist es für die numerische Auswertung zweckmäßig, an Stelle von (II, 10), (II, 12), (II, 13) die folgenden Formeln zu benutzen:

$$I_1(x_2, -h_2, \xi_1, \mu_1) = -\frac{\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(h_1+h_2) - 1 + e^{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h_1+h_2)}}{\left[\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(x_2-\xi_1)\right]^2} + i\,\frac{1-e^{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h_1+h_2)}}{\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(x_2-\xi_1)}$$

$$- e^{-\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(h_1+h_2)}\, e^{-i\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(x_2-\xi_1)} \left[C_i\left(\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(x_2-\xi_1)\right) + i\, S_i\left(\mu_1 \frac{g}{u_0^2}(x_2-\xi_1)\right) + i\,\frac{\pi}{2}\right], \quad (1)$$

$$I_3(x_2, -h_2, \xi_1) = -e^{\frac{g}{u_0^2}(\alpha+i\beta)(h_1+h_2-ix_2+i\xi_1)} E_i\left((\alpha+i\beta)\frac{g}{u_0^2}(-h_1-h_2+ix_2-i\xi_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{(\alpha+i\beta)\frac{g}{u_0^2}(ix_2-i\xi_1-h_1-h_2)}\left[1 + \frac{1!}{(\alpha+i\beta)\frac{g}{u_0^2}(ix_2-i\xi_1-h_1-h_2)} + \cdots\right]. \quad (2)$$

Entsprechend ist die Formel für $I_4(x_2, -h_2, \xi_1)$. Zum Beweis bemerken wir, daß sich (1) aus (II, 10) durch asymptotische Auswertung des dortigen Integrals ergibt, während (2) aus der bekannten[1] asymptotischen Darstellung der E_i-Funktion gewonnen wird.

Wesentlich schwieriger ist die richtige Erfassung des Geschwindigkeitsfeldes, das die freien Wirbel des Flügels *1* am Ort des Flügels *2* induzieren. Die Formeln (II, 22) und (II, 23) sind unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die freien Wirbel in unveränderter Stärke hinter dem Flügel abschwimmen; dieses ist ja in Wirklichkeit nicht der Fall. Da nun jeweils stromaufwärts eines Wirbels dessen Einfluß mit zunehmender Entfernung schnell abklingt, und die ersten (und somit entscheidenden) freien Wirbel hinter dem Flügel noch annähernd ihre volle potentialtheoretische Stärke haben, dürfen Formel (II, 22), (II, 23) sicher für x-Werte in der unmittelbaren Umgebung des Eigenflügels benutzt werden. Keineswegs kann man jedoch erwarten, daß diese Formeln weit hinter Flügel *1*, d.h. am Ort von Flügel *2*, noch richtige Ergebnisse liefern. Es liegt somit nahe, bei der Zirkulation der freien Wirbel einen multiplikativen „Abklingfaktor" $e^{-\zeta \frac{g}{u_0^2}(X-\xi_1)}$ $(\xi_1 \leqq X < \infty)$ anzubringen, der näherungsweise den Zerfall der freien Wirbel beschreibt. Der Nachteil dieser Methode ist jedoch, daß der Wert von ζ aus der Theorie nicht entnommen werden kann, so daß hier eine Unsicherheit besteht.[2] Glücklicherweise hat sich an den Zahlenbeispielen gezeigt, daß der Wert von ζ in der Randbedingungsgleichung keinen starken Einfluß ausübt. Dieses liegt vor allem daran, daß die (in Ziff. 3 noch zu berechnenden) von der Stampf- und Tauchbewegung des Flügels stammenden Geschwindigkeitsanteile einen wesentlichen Einfluß auf die Randbedingung haben, und der Einfluß der freien Wirbel demgegenüber zurücktritt.

Es genügt somit, wenn man einen möglichst guten und gegenüber etwaigen Variationen unempfindlichen Mittelwert von ζ in die Rechnung einsetzt. Um diesen Mittelwert zu gewinnen, gehen wir folgendermaßen vor: Wir wollen annehmen, daß der Ort, an dem die freien Wirbel des vorderen Flügels nur noch etwa 5% ihrer ursprünglichen potentialtheoretischen Stärke haben, zwischen den Stellen $x = L/2$ und $x = L$ liege. (L ist der Abstand der beiden Flügel). Wegen $e^{-3} \approx 0{,}05$ gilt dann

$$3\,\frac{u_0^2}{g\,L} \lessapprox \zeta \lessapprox 6\,\frac{u_0^2}{g\,L}.$$

[1] Vgl. *Lösch-Schoblik*, Die Fakultät und verwandte Funktionen, S. 120, Leipzig 1951.

[2] Man könnte daran denken, hier irgendwie von dem bekannten Zerfallsgesetz eines ebenen Einzelwirbels in laminarer Strömung

$$\Gamma = \Gamma_0\left(1 - e^{-r^2/4\nu t}\right) \qquad (\nu = \text{kinemat. Zähigkeit})$$

Gebrauch zu machen. Jedoch ist die hier vorliegende Strömung voll turbulent, und dann erfolgt der Zerfall der freien Wirbel ganz wesentlich schneller und mit starken Zufallseinwirkungen, so daß aus diesem Gesetz keine quantitativen Hinweise für die Größe von ζ erhalten werden können. Außerdem haben wir es ja hier nicht mit einem Einzelwirbel zu tun. — In der Theorie des *Voith-Schneider*-Propellers (wo ebenfalls die freien Wirbel beim Durchfluß durch die hintere Flügelreihe schon weitgehend zerfallen sind) ist es dem Verfasser gelungen, eine summarische Näherungsdarstellung für das Geschwindigkeitsfeld der in der turbulenten Strömung zerfallenden freien Wirbel abzuleiten; vgl. Ing.-Arch. 24 (1956) S. 148. Diese enthält keinen freien Parameter mehr, und sie hat sich bei der Durchrechnung von Beispielen bewährt. Für ihre Ableitung war jedoch die Rotationsbewegung der Propellerflügel wesentlich, so daß eine ähnliche Darstellung für den Fall des Unterwassertragflügels nicht gefunden werden konnte.

Berechnet man nun mit einem noch unbestimmten ζ-Wert das Geschwindigkeitsfeld $u_{f_1}(2,\zeta)$, $v_{f_1}(2,\zeta)$ der freien Wirbel des Flügels *1* am Ort des Flügels *2*, so ist der von uns für die Rechnung verwendete Mittelwert gegeben durch

$$[u_{f_1}(2)]_m = \frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\int\limits_{3\frac{u_0^2}{g\,L}}^{6\frac{u_0^2}{g\,L}} u_{f_1}(2,\zeta)\,d\zeta\,, \qquad [v_{f_1}(2)]_m = \frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\int\limits_{3\frac{u_0^2}{g\,L}}^{6\frac{u_0^2}{g\,L}} v_{f_1}(2,\zeta)\,d\zeta\,. \tag{3}$$

Für die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten (3) ist es zweckmäßig und auch ausreichend, den Flügel *1* durch einen in seinem 1/4-Punkt (d. h. etwa Druckmittelpunkt) $\xi_1 = -\,a_1/2$ angebrachten Punktwirbel der gleichen Gesamtzirkulation

$$\Gamma_1(t) = A_0^{(1)} + A_1^{(1)} e^{i\omega t} + \bar{A}_1^{(1)} e^{-i\omega t}$$

zu ersetzen. Dann haben die freien Wirbel hinter dem Flügel also die Stärke

$$-\,i\,\frac{\omega}{u_0}\left[A_1^{(1)} e^{i\omega t} e^{-i\frac{\omega}{u_0}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)} e^{-\zeta\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)} - \bar{A}_1^{(1)} e^{-i\omega t} e^{i\frac{\omega}{u_0}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)} e^{-\zeta\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)}\right] dX\,.$$

$$\left(-\frac{a_1}{2} \le X < \infty\right).$$

Um nun die Geschwindigkeiten $u_{f_1}(2,\zeta)$, $v_{f_1}(2,\zeta)$ aus der grundlegenden Formel (II, 9) zu berechnen (analog Arbeit II, Ziff. 4), benötigen wir einige komplizierte Integrale, die wir nachfolgend zusammenstellen. In Anbetracht der großen in Frage kommenden x_2-Werte ist es dabei möglich, sich auf den „quasiasymptotischen" Wert dieser Integrale zu beschränken. Dadurch ergeben sich beträchtliche Vereinfachungen, die bei unserer Näherungsdarstellung natürlich angenehm sind. „Quasiasymptotisch" soll bedeuten, daß wir beschränkte Integralausdrücke, die mit dem Faktor $e^{-\zeta\frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right)}$ behaftet sind, vernachlässigen, und daß wir ferner in der asymptotischen Entwicklung der E_i-Funktion die beiden ersten Glieder berücksichtigen, z. B.

$$e^{-(\zeta+i\Omega)\frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right)} E_i\left((\zeta+i\,\Omega)\,\frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right)\right) \approx \frac{1}{(\zeta+i\,\Omega)\,\frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right)} + \frac{1}{\left[(\zeta+i\,\Omega)\,\frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right)\right]^2}.$$

An Zahlenbeispielen hat sich gezeigt, daß diese quasiasymptotische Darstellung vollständig ausreicht. Es gelten dann mit den Abkürzungen

$$A_{21} = \frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right), \qquad H_{21} = \frac{g}{u_0^2}\,(h_1+h_2) \tag{4}$$

die folgenden Integralformeln:

$$\int\limits_{-a_1/2}^{\infty} e^{-\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)(\zeta+i\Omega)}\,\frac{(h_1+h_2)\,dX}{(x_2-X)^2+(h_1+h_2)^2} = -\,\frac{i}{\Omega-i\zeta}\,\frac{H_{21}}{A_{21}^2+H_{21}^2} \approx -\,\frac{i}{\Omega-i\zeta}\,\frac{H_{21}}{A_{21}^2}\,, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-a_1/2}^{\infty} e^{-\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)(\zeta+i\Omega)}\,\frac{(x_2-X)\,dX}{(x_2-X)^2+(h_1+h_2)^2} = -\,\frac{i}{\Omega-i\zeta}\,\frac{1}{A_{21}} - \frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\,\frac{1}{A_{21}^2}\,, \tag{6}$$

$$\int\limits_{-a_1/2}^{\infty} e^{-\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)(\zeta+i\Omega)}\left\{e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x_2-X)}\left[C_i\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x_2-X)\right)+i\,S_i\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x_2-X)\right)+i\,\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\,\frac{\vartheta - i\,\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x_2-X)}{\vartheta^2+\left[\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x_2-X)\right]^2}\,d\vartheta\right\}\frac{\mu_1 g}{u_0^2}\,dX = -\,\frac{\pi\,\mu_1\,e^{-i\mu_1 A_{21}}}{\mu_1-\Omega+i\zeta}$$

$$-\,\frac{1}{\Omega-i\zeta}\,\frac{e^{\mu_1 H_{21}}}{A_{21}-i\,H_{21}} + \frac{i}{\mu_1(\Omega-i\zeta)}\,\frac{e^{\mu_1 H_{21}}}{(A_{21}-i\,H_{21})^2} + \frac{i}{(\Omega-i\zeta)^2}\,\frac{e^{\mu_1 H_{21}}}{(A_{21}-i\,H_{21})^2}\,, \tag{7}$$

$$\int_{-a_1/2}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)(\zeta+i\Omega)}\, e^{-\mu H_{21}}\, e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x_2-X)}}{\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2}\,\mu\,d\mu\,\frac{g}{u_0^2}\,dX = \frac{i}{\Omega^2(\Omega-i\zeta)}\,\frac{1}{(A_{21}+i\,H_{21})^2}, \tag{8}$$

$$\int_{-a_1/2}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{g}{u_0^2}\left(X+\frac{a_1}{2}\right)(\zeta+i\Omega)}\, e^{-\mu H_{21}}\, e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x_2-X)}}{\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2}\,d\mu\,\frac{g}{u_0^2}\,dX = \frac{1}{\Omega^2(\Omega-i\zeta)}\,\frac{1}{A_{21}+i\,H_{21}}$$

$$-i\,\frac{2\Omega-1}{\Omega^4(\Omega-i\zeta)}\,\frac{1}{(A_{21}+i\,H_{21})^2}-\frac{i}{\Omega^2(\Omega-i\zeta)^2}\,\frac{1}{(A_{21}+i\,H_{21})^2}. \tag{9}$$

Die Integralformeln (5) bis (9) entsprechen der Reihe nach den Integralformeln (II, 17) bis (II, 21). Es sei noch bemerkt, daß Formel (6) auch gilt, wenn $h_1 + h_2 = 0$ ist. Den Beweis der obigen Integralformeln bringen wir in Ziff. 6.

Mit Hilfe von (5) bis (9) können die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten (3) leicht angegeben werden. Nach Ausführung der Mittelungsintegration über ζ mit den Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\int_{\frac{3u_0^2}{gL}}^{\frac{6u_0^2}{gL}}\frac{d\zeta}{\Omega-i\zeta} = \frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{6\,u_0^2}{g\,L}\,\frac{1}{\Omega}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\,u_0^2}{g\,L}\,\frac{1}{\Omega}\right)+\frac{i}{2}\ln\frac{\left(\frac{6\,u_0^2}{g\,L}\right)^2+\Omega^2}{\left(\frac{3\,u_0^2}{g\,L}\right)^2+\Omega^2}\right] = \left[\frac{1}{\Omega-i\zeta}\right]_m,\\
&\frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\int_{\frac{3u_0^2}{gL}}^{\frac{6u_0^2}{gL}}\frac{d\zeta}{\mu_1-\Omega+i\zeta} = \frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{6\,u_0^2}{g\,L}\,\frac{1}{\mu_1-\Omega}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\,u_0^2}{g\,L}\,\frac{1}{\mu_1-\Omega}\right)-\frac{i}{2}\ln\frac{\left(\frac{6\,u_0^2}{g\,L}\right)^2+(\mu_1-\Omega)^2}{\left(\frac{3\,u_0^2}{g\,L}\right)^2+(\mu_1-\Omega)^2}\right],\\
&\qquad = \left[\frac{1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\right]_m\\
&\frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\int_{\frac{3u_0^2}{gL}}^{\frac{6u_0^2}{gL}}\frac{d\zeta}{(\Omega-i\zeta)^2} = i\,\frac{1}{3}\,\frac{g\,L}{u_0^2}\left(\frac{1}{\Omega-i\,\frac{3\,u_0^2}{g\,L}}-\frac{1}{\Omega-i\,\frac{6\,u_0^2}{g\,L}}\right) = \left[\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\right]_m, \qquad (m = \text{Mittelwert})
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und einigen elementaren Zwischenrechnungen erhält man schließlich unter Berücksichtigung von $\mu_1\,\mu_2 = \Omega^2$

$$\left.\begin{aligned}
&[u_{f_1}(2)]_m = u_{f_1}(x_2, -h_2, t) = \frac{i}{2\pi}\,\frac{\omega}{u_0}\,\Delta_1^{(1)}\{\cdots\}\,e^{i\omega t}-\frac{i}{2\pi}\,\frac{\omega}{u_0}\,\overline{\Delta_1^{(1)}\{\cdots\}}\,e^{-i\omega t};\\
&\{\cdots\} = \frac{2\pi\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1 H_{21}}\,e^{-i\mu_1 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\right]_m+\frac{2\pi\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2 H_{21}}\,e^{-i\mu_2 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_2-\Omega+i\zeta}\right]_m\\
&\qquad -i\left(\frac{H_{21}}{A_{21}^2}-\frac{2}{\Omega^2}\,\frac{1}{A_{21}^2}\right)\left[\frac{1}{\Omega-i\zeta}\right]_m,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[v_{f_1}(2)]_m = v_{f_1}(x_2, -h_2, t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega}{u_0}\,\Delta_1^{(1)}\{\cdots\}\,e^{i\omega t}+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega}{u_0}\,\overline{\Delta_1^{(1)}\{\cdots\}}\,e^{-i\omega t};\\
&\{\cdots\} = -\frac{2\pi\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1 H_{21}}\,e^{-i\mu_1 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\right]_m-\frac{2\pi\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2 H_{21}}\,e^{-i\mu_2 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_2-\Omega+i\zeta}\right]_m\\
&\qquad +\frac{2}{A_{21}}\left[\frac{1}{\Omega-i\zeta}\right]_m-\frac{2\,i}{A_{21}^2}\left[\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\right]_m.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

3. Die Stampf- und Tauchbewegung der Flügel. Bevor wir dazu übergehen können, aus den Randbedingungen an den Flügeln die Integralgleichungen zur Bestimmung der Flügelzirkulationen

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1(\xi_1,t) &= \delta_0^{(1)}(\xi_1) + \delta_1^{(1)}(\xi_1)\, e^{i\omega t} + \overline{\delta_1^{(1)}(\xi_1)}\, e^{-i\omega t}, \\ \Gamma_1(t) &= \Delta_0^{(1)} + \Delta_1^{(1)}\, e^{i\omega t} + \overline{\Delta_1^{(1)}}\, e^{-i\omega t} = \int\limits_{-a_1}^{a_1} \gamma_1(\xi_1,t)\, d\xi_1, \\ \gamma_2(\xi_2,t) &= \delta_0^{(2)}(\xi_2) + \delta_1^{(2)}(\xi_2)\, e^{i\omega t} + \overline{\delta_1^{(2)}(\xi_2)}\, e^{-i\omega t}, \\ \Gamma_2(t) &= \Delta_0^{(2)} + \Delta_1^{(2)}\, e^{i\omega t} + \overline{\Delta_1^{(2)}}\, e^{-i\omega t} = \int\limits_{-a_2+L}^{a_2+L} \gamma_2(\xi_2,t)\, d\xi_2 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

abzuleiten, müssen wir noch die Stampf- und Tauchgeschwindigkeiten der Flügel berechnen. Diese dürfen in der Randbedingung am Flügel keinesfalls vernachlässigt werden[1]; im Gegensatz zu der bei einem Flügel allein auftretenden Tauchbewegung (vgl. Arbeit II, Ziff. 5) ist bei einem Zwei-Flügel-System auch die Stampfbewegung zu berücksichtigen. Es sei M die Masse des Tragflügelbootes und s sein Schwerpunkt, ferner $L = L_1 + L_2$ (Abb. 2). Wir nehmen an, daß die

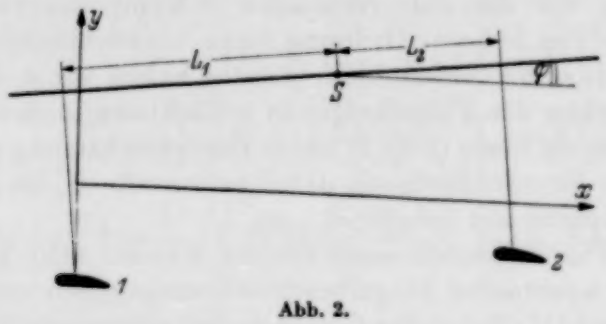

Abb. 2.

Masse der Flügel gegenüber der Bootsmasse vernachlässigbar ist und sehen auch von Dämpfungseinflüssen des Wassers ab. Dann lautet die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes (und damit auch des ganzen Bootes, wenn Durchbiegungen vernachlässigt werden) für das Tauchen

$$\begin{aligned} M\ddot{\eta} \approx -Mg &+ \varrho\, u_0\, \Gamma_1(t) + \varrho\, u_0\, \Gamma_2(t) = -Mg \\ &+ \varrho\, u_0 \left(\Delta_0^{(1)} + \Delta_1^{(1)}\, e^{i\omega t} + \overline{\Delta_1^{(1)}}\, e^{-i\omega t}\right) + \varrho\, u_0 \left(\Delta_0^{(2)} + \Delta_1^{(2)}\, e^{i\omega t} + \overline{\Delta_1^{(2)}}\, e^{-i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Da die Masse M im zeitlichen Mittel mit dem Auftrieb im Gleichgewicht ist, gilt

$$Mg = \varrho\, u_0 \left(\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}\right).$$

Dann liefert die Integration für den Ort des Schwerpunktes unter Berücksichtigung der Periodizitätsbedingung $\eta\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \eta(t)$

$$\eta(t) = \eta_0 - \frac{g}{\omega^2} \frac{\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}}{\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}}\, e^{i\omega t} - \frac{g}{\omega^2} \frac{\overline{\Delta_1^{(1)}} + \overline{\Delta_1^{(2)}}}{\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}}\, e^{-i\omega t}. \tag{14}$$

Wie schon in Ziff. 2 gesagt, soll angenommen werden, daß für die Theorie $\eta \approx \eta_0$ gesetzt werden kann, d. h., daß auch die Tauchtiefen der Flügel ungefähr konstant bleiben. Dagegen ergibt sich die für die Randbedingung wesentliche Vertikalgeschwindigkeit

$$\dot{\eta}(t) = -\frac{g\,i}{\omega} \frac{\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}}{\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}}\, e^{i\omega t} + \frac{g\,i}{\omega} \frac{\overline{\Delta_1^{(1)}} + \overline{\Delta_1^{(2)}}}{\Delta_0^{(1)} + \Delta_0^{(2)}}\, e^{-i\omega t}. \tag{15}$$

Bezogen auf den Schwerpunkt als Drehpunkt lautet die Bewegungsgleichung für das Stampfen bei kleinem Stampfwinkel φ und mit Θ als Trägheitsmoment des Bootes

$$\begin{aligned} \Theta\ddot{\varphi} \approx -L_1 \cos\varphi \cdot \varrho\, u_0\, \Gamma_1(t) + L_2 \cos\varphi \cdot \varrho\, u_0\, \Gamma_2(t) &\approx -\varrho\, u_0 \left(\Delta_0^{(1)} L_1 - \Delta_0^{(2)} L_2\right) \\ -\varrho\, u_0 \left(\Delta_1^{(1)} L_1 - \Delta_1^{(2)} L_2\right) e^{i\omega t} &- \varrho\, u_0 \left(\overline{\Delta_1^{(1)}} L_1 - \overline{\Delta_1^{(2)}} L_2\right) e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

[1] Es sei denn, man beschränkt sich auf die Untersuchung von Flügeln, die etwa in einem Prüfstand fest montiert sind. Dieser Fall ist in der hier entwickelten Theorie mit enthalten; man braucht nur alle Stampf- und Tauchgeschwindigkeiten wegzulassen.

Auch für die Stampfbewegung besteht die Periodizitätsbedingung $\varphi\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\varphi(t)$. Weiter sei $\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\varphi(t)\,dt=\varphi_0=0$; denn ein von Null verschiedener mittlerer Neigungswinkel φ_0 kann im Rahmen der hier vorgelegten Theorie ohne weiteres mit in die Flügelprofilneigungen einbezogen werden. Dann ergibt sich

$$\Delta_0^{(1)} L_1=\Delta_0^{(2)} L_2\,;\qquad L_1=\frac{L\,\Delta_0^{(2)}}{\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}}\,;\qquad L_2=\frac{L\,\Delta_0^{(1)}}{\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}}\,; \tag{16}$$

und die Integration liefert mit (16):

$$\dot\varphi(t)=\frac{i\,g}{\omega}\,\frac{M\,L}{\Theta}\,\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^2}\,e^{i\omega t}-\frac{i\,g}{\omega}\,\frac{M\,L}{\Theta}\,\frac{\bar\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\bar\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^2}\,e^{-i\omega t}\,; \tag{17}$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Omega^2}\,\frac{u_0^2}{g\,L}\,\frac{M\,L^2}{\Theta}\left[\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^2}\,e^{i\omega t}+\frac{\bar\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\bar\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^2}\,e^{-i\omega t}\right]. \tag{18}$$

Für die Randbedingung an den Flügeln ist die y-Komponente der Stampfgeschwindigkeit wesentlich; sie ist gegeben durch $-L_1\dot\varphi\cos\varphi\approx -L_1\dot\varphi$ bei Flügel *1*, $L_2\dot\varphi\cos\varphi\approx L_2\dot\varphi$ bei Flügel *2*. Dagegen werden wir die entsprechenden x-Komponenten $L_1\dot\varphi\sin\varphi\approx L_1\dot\varphi\,\varphi$ bzw. $-L_2\dot\varphi\sin\varphi=-L_2\dot\varphi\,\varphi$ als von höherer Ordnung klein vernachlässigen. Dieses ist bei der hier entwickelten linearen Theorie selbstverständlich. Analog haben wir in den Bewegungsgleichungen für das Stampfen und Tauchen die Flügelkräfte in y-Richtung in der Form $K_y=\varrho\,u_0\,\Gamma'$ eingesetzt und nicht in der genaueren Form (Ziff. 5) unter Berücksichtigung der Störgeschwindigkeiten. Noch unwesentlicher ist die Vernachlässigung der Kraftanteile $K_x\sin\varphi$, die an sich in die Bewegungsgleichung des Stampfens mit eingehen.

Andernfalls würde die Theorie durch nicht lineare Glieder sehr kompliziert, und es müßte dann auch die Annahme der konstanten Flügeltauchtiefe aufgegeben werden. Damit würde unsere grundlegende Ausgangsformel (II, 9) für das Geschwindigkeitspotential eines Wirbels ihre Gültigkeit verlieren.

4. Aufstellung und Lösung der Integralgleichungen. Mit $f_1'(x_1)$ und $f_2'(x_2)$ als Neigungen der Flügelskelettlinien lauten die Randbedingungen am Flügel *1* und *2*

$$\left.\begin{aligned} f_1'(x_1)+\varphi(t)&=\frac{v_1(x_1,-h_1,t)+v_{\gamma_1}(x_1,-h_1,t)+v_{f_1}(x_1,-h_1,t)-\dot\eta(t)+L_1\dot\varphi(t)}{u_1(x_1,-h_1,t)+u_{\gamma 1}(x_1,-h_1,t)+u_{f1}(x_1,-h_1,t)+u_0}\,,\\ f_2'(x_2)+\varphi(t)&=\\ &\frac{v_1(x_2,-h_2,t)+v_{\gamma_2}(x_2,-h_2,t)+v_{f_2}(x_2,-h_2,t)+v_{\gamma_1}(x_2,-h_2,t)+v_{f_1}(x_2,-h_2,t)-\dot\eta(t)-L_2\dot\varphi(t)}{u_1(x_2,-h_2,t)+u_{\gamma_2}(x_2,-h_2,t)+u_{f_2}(x_2,-h_2,t)+u_{\gamma_1}(x_2,-h_2,t)+u_{f_1}(x_2,-h_2,t)+u_0}\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Da nach den Voraussetzungen unserer Theorie sowohl φ als auch u_1, u_γ, u_f klein sind, können wir entsprechend unserer Bemerkung am Schluß von Ziff. 3 die Produkte $\varphi\,u_1$, $\varphi\,u_\gamma$, $\varphi\,u_f$ in den Randbedingungen vernachlässigen und nur $\varphi\,u_0$ berücksichtigen. Wie man leicht erkennt, würden diese Produkte in den Integralgleichungen Anlaß zu nichtlinearen Gliedern geben und damit die Theorie sehr komplizieren.

Aus (19) entstehen durch Koeffizientenvergleich in 1, $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$ sechs Integralgleichungen, von denen nur vier wesentlich sind, denn mit δ_1 ist ja auch $\bar\delta_1$ bekannt. Der Koeffizientenvergleich in 1 liefert

$$\left.\begin{aligned} -2\,u_0 f_1'(x_1)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a_1}^{a_1}\delta_0^{(1)}(\xi_1)\left\{\frac{1}{x_1-\xi_1}+K_{11}(x_1,\xi_1)\right\}d\xi_1\,;\\ -2\,u_0 f_2'(x_2)&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a_1}^{a_1}\delta_0^{(1)}(\xi_1)\,K_{21}(x_2,\xi_1)\,d\xi_1+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a_2+L}^{a_2+L}\delta_0^{(2)}(\xi_2)\left\{\frac{1}{x_2-\xi_2}+K_{22}(x_2,\xi_2)\right\}d\xi_2\,;\\ &\left(-a_1\leqq\frac{x_1}{\xi_1}\leqq a_1\,,\qquad -a_2+L\leqq\frac{x_2}{\xi_2}\leqq a_2+L\right). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dabei sind die Kernanteile K_{11}, K_{22}, K_{21} genau mit denjenigen des Systems (I, 24) identisch: lediglich den Kern K_{12} haben wir diesesmal weggelassen, da wir aus Arbeit I wissen, daß der hintere Flügel praktisch keinen Einfluß auf den vorderen ausübt. Die Auflösung des System (20)

erfolgt also genau nach den Methoden der stationären Theorie aus Arbeit I, und alle Formeln können wörtlich von dort übernommen werden. Damit sind dann $\delta_0^{(1)}(\xi_1)$, $\delta_0^{(2)}(\xi_2)$, $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_0^{(2)}$ als bekannt anzusehen. Insbesondere sind also jedenfalls im Rahmen der hier vorgelegten Theorie die stationären Mittelwerte der Zirkulation unabhängig von der wellenförmigen Anströmung und der durch sie ausgelösten Tauch- und Stampfbewegung der Flügel.[1] Für die effektive Durchführung der Rechnung muß auch der stationäre Anteil des Strömungsfeldes vollständig bekannt sein, ehe mit der Behandlung des instationären Anteils begonnen werden kann.

Durch Koeffizientenvergleich in $e^{i\omega t}$ ergeben sich aus (19) die beiden folgenden Integralgleichungen:

$$2\mu_1\frac{g}{u_0^2}B_1\left(1+if_1'(x_1)\right)e^{-\mu_1\frac{g\,h_1}{u_0^2}}e^{-i\mu_1\frac{g\,x_1}{u_0^2}}+2\mu_2\frac{g}{u_0^2}B_2\left(1+if_1'(x_1)\right)e^{-\mu_2\frac{g\,h_1}{u_0^2}}e^{-i\mu_2\frac{g\,x_1}{u_0^2}}$$
$$-2u_0\frac{M\,L^2}{\Theta}\frac{1}{\Omega^2}\frac{u_0^2}{g\,L}\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^2}+2\frac{g\,i}{\omega}\frac{\Delta_1^{(1)}+\Delta_1^{(2)}}{\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}}+2\frac{g\,i}{\omega}\frac{M\,L^2}{\Theta}\Delta_0^{(2)}\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^3}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-a_1}^{a_1}\delta_1^{(1)}(\xi_1)\left[\frac{1}{x_1-\xi_1}+k_{11}(x_1,\xi_1)-\frac{i\,\omega}{u_0}\ln\left|\frac{x_1}{a_1}-\frac{\xi_1}{a_1}\right|\right]d\xi_1\,, \tag{21}$$

$$2\mu_1\frac{g}{u_0^2}B_1\left(1+if_2'(x_2)\right)e^{-\mu_1\frac{g\,h_2}{u_0^2}}e^{-\mu_1\frac{g\,x_2}{u_0^2}}+2\mu_2\frac{g}{u_0^2}B_2\left(1+if_2'(x_2)\right)e^{-\mu_2\frac{g\,h_2}{u_0^2}}e^{-i\mu_2\frac{g\,x_2}{u_0^2}}$$
$$-2u_0\frac{M\,L^2}{\Theta}\frac{1}{\Omega^2}\frac{u_0^2}{g\,L}\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^2}+2\frac{g\,i}{\omega}\frac{\Delta_1^{(1)}+\Delta_1^{(2)}}{\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}}-2\frac{g\,i}{\omega}\frac{M\,L^2}{\Theta}\Delta_0^{(1)}\frac{\Delta_1^{(1)}\Delta_0^{(2)}-\Delta_1^{(2)}\Delta_0^{(1)}}{[\Delta_0^{(1)}+\Delta_0^{(2)}]^3}$$
$$-\frac{1}{\pi}\Delta_1^{(1)}k_{21}\left(L+\frac{a_2}{2},-\frac{a_1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-a_2+L}^{a_2+L}\delta_1^{(2)}(\xi_2)\left[\frac{1}{x_2-\xi_2}+k_{22}(x_2,\xi_2)-\frac{i\,\omega}{u_0}\ln\left|\frac{x_2}{a_2}-\frac{\xi_2}{a_2}\right|\right]d\xi_2\,. \tag{22}$$

Die Kernanteile $k_{11}(x_1,\xi_1)$ und $k_{22}(x_2,\xi_2)$ sind absolut von der gleichen Form wie (II,29). An sich hätte in Gleichung (22) an Stelle von $\frac{1}{\pi}\Delta_1^{(1)}k_{21}\left(L+\frac{a_2}{2},-\frac{a_1}{2}\right)$ stehen müssen $\frac{1}{\pi}\int_{-a_1}^{a_1}\delta_1^{(1)}(\xi_1)\,k_{21}(x_2,\xi_1)\,d\xi_1$. In Anbetracht der in k_{21} enthaltenen Näherungsdarstellung (11), (12) für die von den freien Wirbeln des Flügels *1* am Ort des Flügels *2* induzierte Geschwindigkeit haben wir uns bei dem Ausdruck k_{21} mit der $^1/_4$—$^3/_4$-Punkt-Methode begnügt. Es ist

$$k_{21}\left(L+\frac{a_2}{2},-\frac{a_1}{2}\right)=\frac{g}{u_0^2}\left\{\frac{A_{21}-f_2'\,H_{21}}{A_{21}^2+H_{21}^2}+\frac{1}{A_{21}}-(i+f_2')\frac{1}{2}\left(1-i\frac{\alpha}{\beta}\right)I_3\left(L+\frac{a_2}{2},-h_2,-\frac{a_1}{2}\right)\right.$$
$$-(i+f_2')\frac{1}{2}\left(1+i\frac{\alpha}{\beta}\right)I_4\left(L+\frac{a_2}{2},-h_2,-\frac{a_1}{2}\right)+(i-f_2')\left[\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}I_1\left(L+\frac{a_2}{2},-h_2,-\frac{a_1}{2},\mu_1\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}I_1\left(L+\frac{a_2}{2},-h_2,-\frac{a_1}{2},\mu_2\right)-\frac{i\,\pi\,\mu_1}{\mu_1-\mu_2}e^{-\mu_1 H_{21}}e^{-i\mu_1 A_{21}}-\frac{i\,\pi\,\mu_2}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_2 H_{21}}e^{-i\mu A_{21}}\right]\right\}$$
$$+2\left(1+if_2'\right)\frac{\omega}{u_0}\left\{\frac{\mu_1\pi}{\mu_1-\mu_2}e^{-\mu_1 H_{21}}e^{-i\mu_1 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\right]_m+\frac{\mu_2\pi}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_2 H_{21}}e^{-i\mu_2 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_2-\Omega+i\zeta}\right]_m\right\}$$
$$-\frac{\omega}{u_0}\left\{\frac{2}{A_{21}}+2f_2'\frac{1}{\Omega^2}\frac{1}{A_{21}^2}-f_2'\frac{H_{21}}{A_{21}^2}\right\}\left[\frac{1}{\Omega-i\zeta}\right]_m+2\,i\,\frac{\omega}{u_0}\frac{1}{A_{21}^2}\left[\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\right]_m. \tag{23}$$

In (23) sind I_1, I_3, I_4 nach Formel (1), (2) zu berechnen. Entsprechend Gleichung (4) ist jetzt $A_{21}=\frac{g}{u_0^2}\left(L+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}\right)$. Schließlich bedeutet z. B.

$$\left[\frac{1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\right]_m=\frac{1}{3}\frac{g\,L}{u_0^2}\int_{\frac{3\,u_0^2}{g\,L}}^{\frac{6\,u_0}{g\,L}}\frac{d\zeta}{\mu_1-\Omega+i\zeta}$$

wieder den Mittelwert gemäß Formel (10).

[1] Dieses wäre nicht mehr der Fall, wenn in den Randbedingungen nichtlineare Glieder wie $\varphi\,u_y$ usw. berücksichtigt würden.

Die in Arbeit II, Ziff. 6 für die Integralgleichung (II, 27) mitgeteilte Auflösungstheorie kann für die beiden Gleichungen (21), (22) ohne weiteres übernommen werden. Die durch die etwas anderen Glieder auf den linken Seiten von (21), (22) bedingten Änderungen sind leicht zu übersehen, so daß wir darauf verzichten, sie hier noch besonders anzugeben. Durch die Abflußbedingungen an den Profilhinterkanten

$$\delta_1^{(1)}(a_1) = 0\,, \qquad \delta_1^{(2)}(a_2 + L) = 0$$

ergibt sich schließlich ein lineares Gleichungssystem für die Berechnung der Zirkulationskoeffizienten $\Delta_1^{(1)}$ und $\Delta_1^{(2)}$.

Damit ist nach den Gleichungen (14), (18) auch die Tauch- und Stampfbewegung des Tragflügelbootes bekannt.

Genau wie in der stationären Theorie Arbeit I, Ziff. 7 kann für Näherungsrechnungen auch jetzt die $^1/_4$—$^3/_4$-Punkt-Methode verwendet werden; d. h. die Flügel werden durch Punktwirbel in ihrem $^1/_4$-Punkt ($\approx$ Druckmittelpunkt) ersetzt, und die Randbedingung wird im $^3/_4$-Punkt erfüllt. Man vermeidet damit die tatsächlich sehr langwierige Berechnung der Fourierkoeffizienten $b_{\lambda\nu}$ gemäß (II, 32) für k_{11} und k_{22}.

5. Berechnung der Flügelkräfte und Form der Wasseroberfläche. Die resultierenden Flügelkräfte in x- und y-Richtung K_x und K_y werden wie üblich nach dem *Kutta-Joukowski*schen Satz berechnet. Für Einzelheiten dieser Rechnung verweisen wir auf Arbeit I, Ziff. 5 und Arbeit II Ziff. 7. Es wird mit ϱ als Wasserdichte für Flügel *1*

$$\left.\begin{aligned} K_y^{(1)} &= \varrho\left\{u_0 + u_1\left(-\tfrac{a_1}{2}, -h_1, t\right) + u_{\gamma_1}^*\left(-\tfrac{a_1}{2}, -h_1, t\right) + u_{f_1}\left(-\tfrac{a_1}{2}, -h_1, t\right)\right\} \Gamma_1(t)\,, \\ K_x^{(1)} &= -\varrho\left\{-\dot\eta(t) + L_1\dot\varphi(t) + v_1\left(-\tfrac{a_1}{2}, -h_1, t\right) + v_{\gamma_1}^*\left(-\tfrac{a_1}{2}, -h_1, t\right) + v_{f_1}\left(-\tfrac{a_1}{2}, -h_1, t\right)\right\} \Gamma_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

und für Flügel *2*

$$\left.\begin{aligned} K_y^{(2)} &= \varrho\left\{u_0 + u_1\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right) + u_{\gamma_2}^*\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right) + u_{f_2}\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right)\right. \\ &\quad \left. + u_{\gamma_1}\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right) + u_{f_1}\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right)\right\} \Gamma_2(t)\,, \\ K_x^{(2)} &= -\varrho\left\{-\dot\eta(t) - L_2\dot\varphi(t) + v_1\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right) + v_{\gamma_2}^*\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right) + v_{f_2}\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right)\right. \\ &\quad \left. + v_{\gamma_1}\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right) + v_{f_1}\left(L - \tfrac{a_2}{2}, -h_2, t\right)\right\} \Gamma_2(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die Berechnung der Form der Wasseroberfläche kann nach Gleichung (II, 1) erfolgen, d. h. hier

$$\begin{aligned} Y(x,t) = &-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_{\gamma_1}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_{f_1}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_{\gamma_2}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_{f_2}}{\partial t}\right)_{y=0} \\ &-\frac{u_0}{g}\left(u_1(x,0,t) + u_{\gamma_1}(x,0,t) + u_{f_1}(x,0,t) + u_{\gamma_2}(x,0,t) + u_{f_2}(x,0,t)\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Der zeitunabhängige Teil von (26) ist natürlich genau mit der Oberflächenform der stationären Theorie der Arbeit I, Ziff. **6b**) identisch. Ein für alle x-Werte gültiger formelmäßiger Ausdruck läßt sich für (26) wegen des Zerfalls der freien Wirbel schwer angeben. (Vgl. die Ausführungen in Ziff. 2.) Jedoch läßt sich für die Umgebung der beiden Flügel folgendes sagen: In der Umgebung des Flügels *1* gilt Formel (II, 39) unverändert; Flügel *2* übt keinen Einfluß aus. In der Umgebung des Flügels *2* gibt Formel (II, 39) (natürlich jetzt bezogen auf Flügel *2*) den Einfluß des Flügels *2* und den der wellenförmigen Anströmung auf die Form der Wasseroberfläche wieder. Hinzu tritt noch additiv ein Ausdruck ΔY, der den Einfluß des Flügels *1* auf die Oberfläche in der Umgebung des Flügels *2* darstellt.

Wir benutzen die Formel (II, 15) für $u_{\gamma_1}(x, 0, t)$ und Formel (11) mit $H_{21} = \frac{h_1 g}{u_0^2}$ für $u_{f_1}(x, 0, t)$; entsprechende Ausdrücke für $\left(\frac{\partial\Phi_{\gamma_1}}{\partial t}\right)_{y=0}$; $\left(\frac{\partial\Phi_{f_1}}{\partial t}\right)_{y=0}$ können in analoger Weise aus (II, 9) unter Be-

nutzung der Integralformeln (5), (6), (7), (9) erhalten werden. Dann ergibt sich nach einigen elementaren Zwischenrechnungen

$$\left.\begin{aligned}\Delta^* Y(x_2,t) = {}& \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta_0^{(1)}}{u_0}\left[I_1\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2},1\right)+\overline{I_1\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2},1\right)}-2\pi e^{-\frac{g h_1}{u_0^2}}\sin\frac{g}{u_0^2}\left(x_2+\frac{a_1}{2}\right)\right]\\ &+\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta_1^{(1)}}{u_0}e^{i\omega t}\{\dots\}+\frac{1}{2\pi}\frac{\overline{\Delta_1^{(1)}}}{u_0}e^{-i\omega t}\overline{\{\dots\}},\end{aligned}\right\}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\{\dots\} = {}& \frac{1}{2}\left(1-i\frac{\alpha}{\beta}\right)I_3\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+i\frac{\alpha}{\beta}\right)I_4\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2}\right)+\frac{i\Omega}{2\beta}I_3\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2}\right)\\ &-\frac{i\Omega}{2\beta}I_4\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2}\right)+\frac{\mu_1-\Omega}{\mu_1-\mu_2}I_1\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2},\mu_1\right)+\frac{\mu_2-\Omega}{\mu_2-\mu_1}I_1\left(x_2,0,-\frac{a_1}{2},\mu_2\right)\\ &-i\pi\frac{\mu_1-\Omega}{\mu_1-\mu_2}e^{-\mu_1 H_{21}}e^{-i\mu_1 A_{21}}-i\pi\frac{\mu_2-\Omega}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_2 H_{21}}e^{-i\mu_2 A_{21}}\\ &-2\pi i\frac{\Omega(\mu_1-\Omega)}{\mu_1-\mu_2}e^{-\mu_1 H_{21}}e^{-i\mu_1 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\right]_m\\ &-2\pi i\frac{\Omega(\mu_2-\Omega)}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_2 H_{21}}e^{-i\mu_2 A_{21}}\left[\frac{1}{\mu_2-\Omega+i\zeta}\right]_m\\ &-\left(\frac{2i}{A_{21}}+\frac{2}{\Omega}\frac{1}{A_{21}^2}\right)\left[\frac{1}{\Omega-i\zeta}\right]_m-\frac{2}{A_{21}^2}\left[\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\right]_m.\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Für die Berechnung von I_1, I_3, I_4 dienen wieder Formel (1) und (2).

6. Beweis der Integralformeln. Wir haben nunmehr den Beweis für die Integralformeln (5) bis (9) nachzutragen. Hierzu verweisen wir noch ausdrücklich auf unsere Definition des quasisymptotischen Wertes auf S. 203.

a) Beweis von (5), (6). Wir führen den Beweis für Formel (6); ganz analog ist er für (5). Mit den Abkürzungen (4) und der Substitution $X = x_2 + (h_1 + h_2)\,\vartheta$ geht das Integral (6) in die Form über

$$-e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_{-A_{21}/H_{21}}^{\infty}e^{-H_{21}(\zeta+i\Omega)\vartheta}\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\vartheta^2+1}\approx e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_0^{A_{21}/H_{21}}e^{H_{21}(\zeta+i\Omega)\vartheta}\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\vartheta^2+1};$$

denn das Integral über ϑ von 0 bis ∞ wird in der quasiasymptotischen Darstellung vernachlässigt. Durch direkte Integration und Vergleich[1] mit der komplexen Reihenentwicklung für die E_i-Funktion findet man

$$\begin{aligned}&e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_0^{A_{21}/H_{21}}e^{H_{21}(\zeta+i\Omega)\vartheta}\frac{\vartheta\,d\vartheta}{\vartheta^2+1}\\ &=\frac{1}{2}e^{-(A_{21}-iH_{21})(\zeta+i\Omega)}\int_0^{A_{21}/H_{21}}\left[\frac{\vartheta+i}{\vartheta^2+1}+\frac{e^{H_{21}(\zeta+i\Omega)(\vartheta-i)}-1}{\vartheta-i}\right]d\vartheta\\ &\quad+\frac{1}{2}e^{-(A_{21}+iH_{21})(\zeta+i\Omega)}\int_0^{A_{21}/H_{21}}\left[\frac{\vartheta-i}{\vartheta^2+1}+\frac{e^{H_{21}(\zeta+i\Omega)(\vartheta+i)}-1}{\vartheta+i}\right]d\vartheta\\ &=\frac{1}{2}e^{-(A_{21}-iH_{21})(\zeta+i\Omega)}\left[E_i\left((\zeta+i\Omega)(A_{21}-iH_{21})\right)-E_i\left(H_{21}(\Omega-i\zeta)\right)\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}e^{-(A_{21}+iH_{21})(\zeta+i\Omega)}\left[E_i\left((\zeta+i\Omega)(A_{21}+iH_{21})\right)-E_i\left(H_{21}(-\Omega+i\zeta)\right)\right]\\ &\approx-\frac{i}{2}\frac{1}{\Omega-i\zeta}\left(\frac{1}{A_{21}-iH_{21}}+\frac{1}{A_{21}+iH_{21}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\left(\frac{1}{(A_{21}-iH_{21})^2}+\frac{1}{(A_{21}+iH_{21})^2}\right)\\ &\approx-\frac{i}{\Omega-i\zeta}\frac{1}{A_{21}}-\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\frac{1}{A_{21}^2};\end{aligned}$$

[1] Vgl. z. B. *Lösch-Schoblik*, Fußnote S. 2., S. 118.

denn $A_{21}^2 \gg H_{21}^2$. Im Spezialfall $H_{21} = 0$ verläuft der Beweis ähnlich mit Benutzung der Relationen

$$-e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_{-A_{21}}^{\infty} e^{-(\zeta+i\Omega)\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-(\zeta+i\Omega)\tau}}{\tau - A_{21}}\,d\tau = e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\left[E_i\left(A_{21}\,(\zeta+i\,\Omega)\right)+i\,\pi\right].$$

b) Beweis von (7). Mit der Abkürzung (4) und der Substitution $\tau = \frac{\mu_1 g}{u_0^2}(X - x_2)$ geht das Integral (7) in die Form über

$$e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\left\{\int_{-\mu_1 A_{21}}^{\infty} e^{-\frac{1}{\mu_1}\tau(\zeta-i\mu_1+i\Omega)}\left[C_i(\tau) - i\,S_i(\tau) + i\,\frac{\pi}{2}\right]d\tau + \int_{-\mu_1 A_{21}}^{\infty} e^{-\frac{1}{\mu_1}\tau(\zeta+i\Omega)}\int_{0}^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\,\frac{\vartheta+i\,\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta\,d\tau\right\}.$$

Wir betrachten zunächst den ersten Anteil; es ist

$$-\int_{-\mu_1 A_{21}}^{\infty} e^{-\frac{1}{\mu_1}(\zeta-i\mu_1+i\Omega)\tau}\int_{\tau}^{\infty} e^{-i\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta}\,d\tau = \left[\frac{\mu_1\, e^{-\frac{1}{\mu_1}(\zeta-i\mu_1+i\Omega)\tau}}{\zeta-i\mu_1+i\Omega}\int_{\tau}^{\infty} e^{-i\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta}\right]_{-\mu_1 A_{21}}^{\infty}$$

$$+\frac{\mu_1}{\zeta-i\mu_1+i\Omega}\int_{-\mu_1 A_{21}}^{\infty} e^{-\frac{1}{\mu_1}(\zeta+i\Omega)\tau}\frac{d\tau}{\tau} = \frac{\mu_1\, e^{(\zeta-i\mu_1+i\Omega)A_{21}}}{\zeta-i\mu_1+i\Omega}\left[C_i(\mu_1 A_{21}) + i\,S_i(\mu_1 A_{21}) + i\,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+\frac{\mu_1}{\zeta-i\mu_1+i\Omega}\,e^{(\zeta+i\Omega)A_{21}}\int_{0}^{\infty} e^{-(\zeta+i\Omega)\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta - A_{21}} = \frac{i\,\mu_1\, e^{(\zeta-i\mu_1+i\Omega)A_{21}}}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\left[i\,\pi + E_i(i\,\mu_1 A_{21})\right]$$

$$-\frac{i\,\mu_1}{\mu_1-\Omega+i\zeta}\left[i\,\pi + E_i(\zeta A_{21} + i\,\Omega A_{21})\right];$$

dabei wurde von der Formel (II, 10) und der Reihenentwicklung der *Ei*-Funktion Gebrauch gemacht.

Untersuchen wir nun den zweiten Anteil des Integrals (7), so kann das Integral über τ von 0 bis ∞ in der quasiasymptotischen Darstellung vernachlässigt werden, und es bleibt

$$e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_{0}^{\mu_1 A_{21}} e^{\frac{1}{\mu_1}(\zeta+i\Omega)\tau}\int_{0}^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\,\frac{\vartheta - i\,\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta\,d\tau$$

$$= -i\,e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_{0}^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\left\{e^{i\frac{\vartheta}{\mu_1}(\zeta+i\Omega)}\int_{0}^{\mu_1 A_{21}}\left[\frac{\tau+i\,\vartheta}{\tau^2+\vartheta^2} + \frac{e^{-\frac{1}{\mu_1}(\zeta+i\Omega)(\tau-i\vartheta)}-1}{\tau-i\,\vartheta}\right]d\tau\right\}d\vartheta$$

$$= -i\,e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_{0}^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\,e^{i\frac{\vartheta}{\mu_1}(\zeta+i\Omega)}\left[E_i\left((\zeta+i\,\Omega)\left(A_{21} - i\,\frac{\vartheta}{\mu_1}\right)\right) - E_i\left(\frac{\vartheta}{\mu_1}(\Omega - i\,\zeta)\right)\right]d\vartheta$$

$$\approx -i\,e^{-A_{21}(\zeta+i\Omega)}\int_{0}^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\,e^{i\frac{\vartheta}{\mu_1}(\zeta+i\Omega)}\,E_i\left((\zeta+i\,\Omega)\left(A_{21} - i\,\frac{\vartheta}{\mu_1}\right)\right)d\vartheta$$

$$\approx -i\int_{0}^{\mu_1 H_{21}} e^{\vartheta}\left[\frac{\mu_1}{\Omega - i\zeta}\,\frac{1}{\vartheta + i\,\mu_1 A_{21}} + \frac{\mu_1^2}{(\Omega-i\zeta)^2}\,\frac{1}{(\vartheta+i\,\mu_1 A_{21})^2}\right]d\vartheta = \frac{i\,\mu_1}{(\Omega-i\zeta)^2}\left(\frac{e^{\mu_1 H_{21}}}{H_{21}+i\,A_{21}} - \frac{1}{i\,A_{21}}\right)$$

$$-i\,\frac{\mu_1}{\Omega-i\zeta}\left(1+\frac{\mu_1}{\Omega-i\zeta}\right)\int_{0}^{\mu_1 H_{21}}\left[\frac{\vartheta - i\,\mu_1 A_{21}}{\vartheta^2+\mu_1^2 A_{21}^2} + \frac{e^{\vartheta+i\mu_1 A_{21}}-1}{\vartheta+i\,\mu_1 A_{21}}\right]d\vartheta\cdot e^{-i\mu_1 A_{21}}$$

$$= \frac{i\,\mu_1}{(\Omega-i\zeta)^2}\left(\frac{e^{\mu_1 H_{21}}}{H_{21}+i\,A_{21}} + \frac{i}{A_{21}}\right) - \frac{i\,\mu_1}{\Omega-i\zeta}\left(1+\frac{\mu_1}{\Omega-i\zeta}\right)e^{-i\mu_1 A_{21}}\left[E_i(\mu_1 H_{21} + i\,\mu_1 A_{21}) - E_i(i\,\mu_1 A_{21})\right].$$

Setzt man nun die beiden Anteile des Integrals (7) wieder zusammen, so erhält man in quasiasymptotischer Form nach kurzer, elementarer Zwischenrechnung das behauptete Ergebnis.

c) Beweis von (8), (9). Wir geben den Beweis für Formel (9); ganz analog ist er für (8). Zunächst erhalten wir unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach Ausführung der Integration über X für Formel (9)

$$-i\int_0^\infty \frac{e^{-\mu H_{21}}\, e^{i\mu A_{21}}\, d\mu}{(\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2)(\mu+\Omega-i\zeta)}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{(\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2)(\mu+\Omega-i\zeta)} = \frac{i}{2\beta}\,\frac{1-\Omega-i\zeta}{\Omega-i\zeta-\zeta^2}\left(\frac{1}{\mu+\alpha+i\beta}-\frac{1}{\mu+\alpha-i\beta}\right)$$
$$+\frac{i}{2\beta}\,\frac{1}{\Omega-i\zeta-\zeta^2}\left(\frac{\alpha+i\beta}{\mu+\alpha+i\beta}-\frac{\alpha-i\beta}{\mu+\alpha-i\beta}\right)+\frac{1}{\Omega-i\zeta-\zeta^2}\,\frac{1}{\mu+\Omega-i\zeta}.$$

Benutzt man ferner die quasiasymptotische Form des Integrals (II, 12)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu H_{21}+i\mu A_{21}}}{\mu+\alpha+i\beta}\,d\mu = -e^{(H_{21}-iA_{21})(\alpha+i\beta)}\,E_i\left((iA_{21}-H_{21})(\alpha+i\beta)\right)$$
$$\approx -\frac{1}{(iA_{21}-H_{21})(\alpha+i\beta)}-\frac{1}{(iA_{21}-H_{21})^2(\alpha+i\beta)^2},$$

so wird mit $\Omega^2=\alpha^2+\beta^2$ und $2\alpha=2\Omega-1$

$$-i\int_0^\infty \frac{e^{-\mu H_{21}}\, e^{i\mu A_{21}}\, d\mu}{(\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2)(\mu+\Omega-i\zeta)}$$
$$=\frac{1}{\Omega-i\zeta-\zeta^2}\left(\frac{1-\Omega-i\zeta}{\Omega^2}+\frac{1}{\Omega-i\zeta}\right)\frac{1}{A_{21}+iH_{21}}$$
$$-\frac{i}{\Omega-i\zeta-\zeta^2}\left[\frac{(2\Omega-1)(1-\Omega-i\zeta)}{\Omega^4}+\frac{1}{\Omega^2}+\frac{1}{(\Omega-i\zeta)^2}\right]\frac{1}{(A_{21}+iH_{21})^2}$$
$$=\frac{1}{\Omega^2}\,\frac{1}{\Omega-i\zeta}\,\frac{1}{A_{21}+iH_{21}}-i\,\frac{3\Omega^2-\Omega-2i\zeta\Omega+i\zeta}{\Omega^4(\Omega-i\zeta)^2}\,\frac{1}{(A_{21}+iH_{21})^2}.$$

Dieses ist bereits das zu beweisende Ergebnis.

7. Zahlenbeispiele von Einzelflügeln. Bei den vier folgenden Beispielen handelt es sich um Flügel mit dem Plattenprofil $f'(x)=$ konst. $=-0{,}1$. Ferner sei für

Beispiel 1a: $a\,g/u_0^2=0{,}1$, $h\,g/u_0^2=0{,}1$, $\Omega=\omega\,u_0/g=2\pi$,

Beispiel 1b: $a\,g/u_0^2=0{,}1$, $h\,g/u_0^2=0{,}1$, $\Omega=\omega\,u_0/g=\frac{2}{3}\pi$,

Beispiel 3a: $a\,g/u_0^2=0{,}05$, $h\,g/u_0^2=0{,}05$, $\Omega=\omega\,u_0/g=4\pi$,

Beispiel 3b: $a\,g/u_0^2=0{,}05$, $h\,g/u_0^2=0{,}05$, $\Omega=\omega\,u_0/g=\frac{4}{3}\pi$.

Die Berechnung des stationären Anteils der Beispiele 1a, 1b bzw. 3a, 3b wurde bereits als Beispiel 1 bzw. 3 in Arbeit I, Ziff. 9 durchgeführt, und alle wesentlichen Größen, insbesondere die stationären Mittelwerte der Flügelzirkulation Δ_0 (in Arbeit I mit Γ bezeichnet) und der Wasseroberfläche, können von dort unverändert übernommen werden.

Der Frequenzzahlwert $\Omega=2\pi$ bzw. $\Omega=4\pi$ bedeutet, daß der Tragflügel in der Zeit $\frac{2\pi}{\omega}$ einer Wellenperiode mit der Geschwindigkeit u_0 die Strecke $10\,a$ zurücklegt; bei den niedrigeren Werten $\Omega=\frac{2\pi}{3}$ und $\Omega=\frac{4\pi}{3}$ beträgt diese Strecke $30\,a$. Bei jeder Frequenz ω der wellenförmigen

Anströmung ist dann gemäß (II, 3) eine kürzere (Wellenzahl μ_1) und eine längere Welle (Wellenzahl μ_2) möglich. Es ergibt sich für[1]

Beispiel 1a: $\mu_1 = 9{,}339$, $\mu_2 = 4{,}227$, $\alpha = 5{,}783$, $\beta = 2{,}456$,
Beispiel 1b: $\mu_1 = 4{,}126$, $\mu_2 = 1{,}063$, $\alpha = 1{,}594$, $\beta = 1{,}358$,
Beispiel 3a: $\mu_1 = 16{,}646$, $\mu_2 = 9{,}486$, $\alpha = 12{,}066$, $\beta = 3{,}509$,
Beispiel 3b: $\mu_1 = 6{,}796$, $\mu_2 = 2{,}582$, $\alpha = 3{,}689$, $\beta = 1{,}985$.

Für die Auswertung der Theorie und die Diskussion unserer Beispiele wollen wir davon ausgehen, daß die von der Wellenanströmung geformte Wasseroberfläche weit vor dem Tragflügel ($x \to -\infty$) gegeben ist durch

$$\frac{1}{a}\, Y(x,t) = B_1^* \sin\left(\omega t - \mu_1 \frac{g\,x}{u_0^2}\right) + B_2^* \sin\left(\omega t - \mu_2 \frac{g\,x}{u_0^2}\right). \tag{28}$$

Gemäß (II, 39) ist dann

$$B_1^* = -2\,(\mu_1 - \Omega)\,\frac{B_1}{u_0\,a}, \qquad B_2^* = -2\,(\mu_2 - \Omega)\,\frac{B_2}{u_0\,a}.$$

Da die Berechnung der Fourierkoeffizienten $b_{\lambda\nu}$ für den Kernanteil $k(x,\xi)$ der Integralgleichung (II, 27) sehr mühsam und langwierig ist, wurde für die Berechnung des instationären Zirkulationskoeffizienten Δ_1 hauptsächlich die $^1/_4$—$^3/_4$-Punkt-Methode verwendet. Um eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, wurde das Beispiel 3b auch nach der genaueren Theorie behandelt, d. h. durch Auflösung der Integralgleichung (II, 27). Wie schon früher in der stationären Theorie hat sich gezeigt, daß die $^1/_4$—$^3/_4$-Punkt-Methode recht brauchbare Näherungswerte liefert; diese sind besser, wenn die Tauchbewegung des Flügels mit berücksichtigt wird, als bei festgehaltenem Flügel.

In Tabelle 1 sind die nach der $^1/_4$—$^3/_4$-Punkt-Methode berechneten Zirkulationskoeffizienten Δ_1 in Einheiten von $a\,u_0$ zusammengestellt. Für Beispiel 3b sind die Fourierkoeffizienten $b_{\lambda\nu}$ der Reihenentwicklung (II, 32) in Tabelle 2 enthalten. Da die $b_{\lambda\nu}$ wesentlich kleiner als 1 sind, kann das Gleichungssystem (II, 36) für die Koeffizienten P_ν der Lösung (II, 35) leicht durch Iteration aufgelöst werden. Das Ergebnis ist in Tabelle 3 enthalten. (P_ν in Einheiten von u_0.) Wie zu erwarten war, sind die Δ_1-Werte mit Berücksichtigung der Tauchbewegung merklich kleiner als diejenigen ohne Tauchbewegung bei festgehaltenem Flügel; denn die Tauchgeschwindigkeit übt ja in der Randbedingung einen stabilisierenden Einfluß aus.

Tabelle 1.

Beispiel	Δ_1 mit Tauchbewegung	Δ_1 ohne Tauchbewegung
1a	$-(0{,}072 + 0{,}038\,i)\,B_1^* + (0{,}067 + 0{,}061\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}146 - 0{,}019\,i)\,B_1^* + (0{,}164 + 0{,}022\,i)\,B_2^*$
1b	$-(0{,}022 + 0{,}040\,i)\,B_1^* + (0{,}011 + 0{,}030\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}223 - 0{,}056\,i)\,B_1^* + (0{,}157 - 0{,}015\,i)\,B_2^*$
3a	$-(0{,}080 + 0{,}022\,i)\,B_1^* + (0{,}081 + 0{,}039\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}106 - 0{,}009\,i)\,B_1^* + (0{,}114 + 0{,}011\,i)\,B_2^*$
3b	$-(0{,}046 + 0{,}052\,i)\,B_1^* + (0{,}030 + 0{,}043\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}152 - 0{,}042\,i)\,B_1^* + (0{,}119 - 0{,}020\,i)\,B_2^*$

Tabelle 2. $b_{\lambda\nu}$.

λ \ ν	0	1	2	3	4	5
1	$+0{,}575 + 0{,}170\,i$	$+0{,}275 - 0{,}154\,i$	$-0{,}016 - 0{,}017\,i$	$-0{,}013 + 0{,}001\,i$	$+0{,}001\,i$	0,000
2	$-0{,}122 + 0{,}076\,i$	$+0{,}032 + 0{,}034\,i$	$+0{,}044 - 0{,}002\,i$	$-0{,}001 - 0{,}002\,i$	$-0{,}003$	0,000
3	$-0{,}007 - 0{,}007\,i$	$-0{,}038 + 0{,}002\,i$	$+0{,}001 + 0{,}003\,i$	$+0{,}009$	0,000	$-0{,}001$
4	$+0{,}003$	$-0{,}001 - 0{,}001\,i$	$-0{,}007$	$+0{,}001\,i$	$+0{,}003$	0,000
5	0,000	$+0{,}001$	0,000	$-0{,}002$	0,000	$+0{,}001$

Tabelle 3.

	mit Tauchbewegung	ohne Tauchbewegung
Δ_1	$-(0{,}0451 + 0{,}0511\,i)\,B_1^* + (0{,}0305 + 0{,}0438\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}1526 - 0{,}0453\,i)\,B_1^* + (0{,}1232 - 0{,}0215\,i)\,B_2^*$
P_1	$-(0{,}0275 + 0{,}0360\,i)\,B_1^* + (0{,}0175 + 0{,}0214\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}0657 - 0{,}0131\,i)\,B_1^* + (0{,}0517 - 0{,}0135\,i)\,B_2^*$
P_2	$-(0{,}0094 + 0{,}0163\,i)\,B_1^* + (0{,}0056 + 0{,}0043\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}0053 + 0{,}0048\,i)\,B_1^* + (0{,}0035 - 0{,}0051\,i)\,B_2^*$
P_3	$+(0{,}0002 - 0{,}0008\,i)\,B_1^* + (0{,}0004 + 0{,}0003\,i)\,B_2^*$	$-(0{,}0005 - 0{,}0001\,i)\,B_1^* + (0{,}0009 - 0{,}0002\,i)\,B_2^*$
P_4	$0{,}000\,B_1^* + 0{,}000\,B_2^*$	$0{,}000\,B_1^* + 0{,}000\,B_2^*$
P_5	$0{,}000\,B_1^* + 0{,}000\,B_2^*$	$0{,}000\,B_1^* + 0{,}000\,B_2^*$

[1] Für die Durchführung der in dieser Arbeit enthaltenen numerischen Rechnungen danke ich Frau *M. Mutzek* und Frau *E. Kautz*.

Für die weitere Diskussion und die zahlenmäßige Darstellung der Ergebnisse ist es zweckmäßig, bei jedem Beispiel die zwei charakteristischen Hauptfälle zu betrachten:

Fall 1) $B_1^* = \varepsilon$, $B_2^* = 0$, Fall 2) $B_1^* = 0$, $B_2^* = \varepsilon$.

Aus 1) und 2) können dann durch lineare Superposition beliebige weitere Fälle zusammengesetzt werden.

Tabelle 4 zeigt die Funktion $\Gamma(t) - \Delta_0$, d. h. den instationären Anteil der Flügelzirkulation in Einheiten von $a\, u_0\, \varepsilon$. Bei den ωt-Werten kann man sich auf den Bereich bis π beschränken, denn nach unseren Ansätzen für die Flügelzirkulation ist ja $\Gamma\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) - \Delta_0 = -\Gamma(t) + \Delta_0$.

Tabelle 4. $\Gamma(t) - \Delta_0$.

	ωt	Beispiel 1a		Beispiel 1b		Beispiel 3a		Beispiel 3b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
mit Tauchbewegung	0	− 0,144	+ 0,134	− 0,044	+ 0,022	− 0,160	+ 0,162	− 0,092	+ 0 060
	$\pi/6$	− 0,087	+ 0,055	+ 0,002	− 0,011	− 0,117	+ 0,101	− 0,028	+ 0 009
	$\pi/3$	− 0,006	− 0,039	+ 0,047	− 0,041	− 0,042	+ 0,013	+ 0,044	− 0 044
	$\pi/2$	+ 0,076	− 0 122	+ 0,080	− 0,060	+ 0,044	− 0,078	+ 0,104	− 0,086
	$2\pi/3$	+ 0,138	− 0,173	+ 0,091	− 0,063	+ 0,118	− 0,149	+ 0,136	− 0,104
	$5\pi/6$	+ 0,163	− 0,177	+ 0,078	− 0,049	+ 0,161	− 0,179	+ 0,132	− 0,095
ohne Tauchbewegung	0	− 0,292	+ 0,328	− 0,446	+ 0,314	− 0,212	+ 0,228	− 0,304	+ 0,238
	$\pi/6$	− 0,272	+ 0,262	− 0,442	+ 0,287	− 0,193	+ 0,186	− 0,305	+ 0,226
	$\pi/3$	− 0,179	+ 0,126	− 0,320	+ 0,183	− 0,122	+ 0,095	− 0,225	+ 0,154
	$\pi/2$	− 0,038	− 0,044	− 0,112	+ 0,030	− 0,018	− 0,022	− 0,084	+ 0,040
	$2\pi/3$	+ 0,113	− 0,202	+ 0,126	− 0,131	+ 0,090	− 0,133	+ 0,079	− 0,084
	$5\pi/6$	+ 0,234	− 0,306	+ 0,330	− 0,257	+ 0,175	− 0,208	+ 0,221	− 0,186

Tabelle 5. $\partial_1 K_y$.

	ωt	Beispiel 1a		Beispiel 1b		Beispiel 3a		Beispiel 3b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
mit Tauchbewegung	0	− 0,149	+ 0,136	− 0,047	+ 0,022	− 0,163	+ 0,162	− 0,091	+ 0,058
	$\pi/6$	− 0,100	+ 0,069	− 0,013	− 0,002	− 0,127	+ 0,111	− 0,037	+ 0,015
	$\pi/3$	− 0,026	− 0,016	+ 0,024	− 0,026	− 0,059	+ 0,031	+ 0,026	− 0,032
	$\pi/2$	+ 0,057	− 0,097	+ 0,055	− 0,043	+ 0,027	− 0,058	+ 0,083	− 0,070
	$2\pi/3$	+ 0,124	− 0,152	+ 0,072	− 0,049	+ 0,105	− 0,131	+ 0,118	− 0,090
	$5\pi/6$	+ 0,158	− 0,167	+ 0,069	− 0,040	+ 0,155	− 0,169	+ 0,121	− 0,085
ohne Tauchbewegung	0	−0,308	+ 0,334	− 0,448	+ 0,310	− 0,223	+ 0,233	− 0,302	+ 0,237
	$\pi/6$	− 0,302	+ 0,287	− 0,462	+ 0,296	− 0,216	+ 0,208	− 0,318	+ 0,239
	$\pi/3$	− 0,215	+ 0,164	− 0,352	+ 0,203	− 0,152	+ 0,126	− 0,248	+ 0,178
	$\pi/2$	− 0,070	− 0,003	− 0,148	+ 0,056	− 0,047	+ 0,012	− 0,113	+ 0,069
	$2\pi/3$	+ 0,093	− 0,170	+ 0,096	− 0,107	+ 0,071	− 0,107	+ 0,054	− 0,059
	$5\pi/6$	+ 0,232	− 0,291	+ 0,314	− 0,240	+ 0,170	− 0,196	+ 0,206	− 0,171

Die Kraftkomponenten K_y und K_x nach Formel (II, 37) setzen sich aus drei Anteilen zusammen. Zunächst ein von ε unabhängiger stationärer Anteil, der zahlenmäßig genau mit dem in Arbeit I, Ziff. 9 berechneten K_y- bzw. K_x-Wert übereinstimmt. Sodann ein in ε linearer Anteil $\partial_1 K_y$ bzw. $\partial_1 K_x$; dieser ist in Einheiten von $\varrho\, u_0^2\, a\, \varepsilon$ in den Tabellen 5 und 6 enthalten. Hierbei ist die Superposition der Fälle 1) und 2) möglich. Schließlich tritt ein in ε quadratischer Anteil auf. Wie wir noch sehen werden, muß im Gültigkeitsbereich unserer Theorie stets $\varepsilon^2 < 0{,}1$ sein. Es hat sich gezeigt, daß dann der in ε quadratische Anteil von K_y etwa von der Größenordnung $0{,}001\, \varrho\, u_0^2\, a$ ist und somit in Anbetracht des großen stationären Hauptwertes von K_y vernachlässigt werden kann.

Dagegen dürfte wenigstens der in ε quadratische und zeitunabhängige Zusatzanteil $\partial_2 K_x$ zum Wellenwiderstand K_x trotz seiner Kleinheit von gewissem Interesse sein, denn der Hauptwert des Wellenwiderstandes ist ja selbst klein. (vgl. Arbeit I, Ziff. 9). $\partial_2 K_x$ ist in allgemeiner Form [Fall 1) und 2) nicht superponierbar] in Einheiten von $\varrho\, u_0^2\, a$ in Tabelle 7 enthalten.

Tabelle 8 zeigt den Verlauf der für die Tauchbewegung bzw. die Tiefenlage des Flügels maßgebenden Funktion $\frac{1}{h}\eta(t) + 1$ gemäß Gleichung (II, 25) in Einheiten von ε.

Tabelle 6. $\partial_1 K_x$.

	ωt	Beispiel 1a		Beispiel 1b		Beispiel 3a		Beispiel 3b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
mit Tauchbewegung	0	+ 0,013	— 0,016	+ 0,006	— 0,002	+ 0,015	— 0,019	+ 0,010	— 0,007
	$\pi/6$	— 0,004	— 0,006	— 0,008	+ 0,003	+ 0,004	— 0,013	— 0,001	— 0,001
	$\pi/3$	— 0,019	+ 0,006	— 0,019	+ 0,007	— 0,008	— 0,003	— 0,012	+ 0,004
	$\pi/2$	— 0,030	+ 0,016	— 0,025	+ 0,009	— 0,018	+ 0,008	— 0,020	+ 0,009
	$2\pi/3$	— 0,033	+ 0,022	— 0,025	+ 0,009	— 0,024	+ 0,017	— 0,022	+ 0,012
	$5\pi/6$	— 0,026	+ 0,022	— 0,018	+ 0,007	— 0,022	+ 0,021	— 0,019	+ 0,011
ohne Tauchbewegung	0	+ 0,008	— 0,016	+ 0,016	— 0,012	+ 0,011	— 0,017	+ 0,017	— 0,016
	$\pi/6$	0,000	— 0,016	+ 0,011	— 0,009	+ 0,006	— 0,016	+ 0,013	— 0,008
	$\pi/3$	— 0,007	— 0,011	+ 0,003	— 0,009	— 0,001	— 0,011	+ 0,006	+ 0,002
	$\pi/2$	— 0,013	— 0,004	— 0,006	— 0,003	— 0,008	— 0,002	— 0,003	+ 0,011
	$2\pi/3$	— 0,015	+ 0,005	— 0,013	+ 0,003	— 0,013	+ 0,007	— 0,011	+ 0,018
	$5\pi/6$	— 0,014	+ 0,016	— 0,017	+ 0,011	— 0,014	+ 0,014	— 0,016	+ 0,020

Tabelle 7.

Beispiel	$\partial_1 K_x$ mit Tauchbewegung	$\partial_1 K_x$ ohne Tauchbewegung
1a	$-0{,}007\ B_1^{*2} - 0{,}007\ B_2^{*2} + 0{,}015\ B_1^* B_2^*$	$-0{,}006\ B_1^{*2} - 0{,}012\ B_2^{*2} + 0{,}020\ B_1^* B_2^*$
1b	$-0{,}004\ B_1^{*2} - 0{,}001\ B_2^{*2} + 0{,}004\ B_1^* B_2^*$	$-0{,}018\ B_1^{*2} - 0{,}010\ B_2^{*2} + 0{,}027\ B_1^* B_2^*$
3a	$-0{,}005\ B_1^{*2} - 0{,}005\ B_2^{*2} + 0{,}010\ B_1^* B_2^*$	$-0{,}004\ B_1^{*2} - 0{,}006\ B_2^{*2} + 0{,}010\ B_1^* B_2^*$
3b	$-0{,}004\ B_1^{*2} - 0{,}002\ B_2^{*2} + 0{,}006\ B_1^* B_2^*$	$-0{,}009\ B_1^{*2} - 0{,}005\ B_2^{*2} + 0{,}013\ B_1^* B_2^*$

Tabelle 8. $\frac{1}{h}\eta(t) + 1$.

ωt	Beispiel 1a		Beispiel 1b		Beispiel 3a		Beispiel 3b	
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
0	+ 0,107	— 0,099	+ 0,293	— 0,147	+ 0,050	— 0,051	+ 0,260	— 0,170
$\pi/6$	+ 0,064	— 0,041	— 0,013	+ 0,073	+ 0,036	— 0,032	+ 0,078	— 0,025
$\pi/3$	+ 0,004	+ 0,028	— 0,315	+ 0,272	+ 0,013	— 0,005	— 0,125	+ 0,125
$\pi/2$	— 0,058	+ 0,090	— 0,533	+ 0,400	— 0,014	+ 0,024	— 0,294	+ 0,243
$2\pi/3$	— 0,104	+ 0,128	— 0,609	+ 0,420	— 0,037	+ 0,047	— 0,385	+ 0,295
$5\pi/6$	— 0,122	+ 0,131	— 0,521	+ 0,327	— 0,050	+ 0,056	— 0,372	+ 0,269

Schließlich ist in Tabelle 9 und 10 der instationäre Anteil $\frac{1}{a}\,Y(x,t) - \frac{1}{a}\,Y_0(x)$ der freien Wasseroberfläche berechnet für die drei Punkte $x = -2a,\ 0,\ +2a$ in der Umgebung des Flügels enthalten. (In Einheiten von ε.) Dabei ist $\frac{1}{a}\,Y_0(x)$ der bereits in Arbeit I berechnete stationäre Mittelwert der freien Wasseroberfläche (vgl. dort Tabelle 5, Beispiel 1 und 3).

Tabelle 9. $\frac{1}{a}\,Y(x,t) - \frac{1}{a}\,Y_0(x)$ (mit Tauchbewegung).

x/a	ωt	Beispiel 1a		Beispiel 1b		Beispiel 3a		Beispiel 3b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
— 2	0	+ 0,954	+ 0,758	+ 0,718	+ 0,224	+ 0,998	+ 0,814	+ 0,610	+ 0,272
0	0	+ 0,050	— 0,048	— 0,014	+ 0,012	+ 0,056	— 0,056	— 0,014	+ 0,014
+ 2	0	— 0,884	— 0,860	— 0,696	— 0,232	— 0,938	— 0,902	— 0,560	— 0,300
— 2	$\pi/6$	+ 0,667	+ 1,001	+ 0,954	+ 0,687	+ 0,804	+ 1,010	+ 0,902	+ 0,730
0	$\pi/6$	+ 0,531	+ 0,478	+ 0,474	+ 0,519	+ 0,540	+ 0,466	+ 0,463	+ 0,530
+ 2	$\pi/6$	— 0,850	— 0,471	— 0,293	+ 0,310	— 0,787	— 0,561	— 0,138	+ 0,258
— 2	$\pi/3$	+ 0,202	+ 0,977	+ 0,934	+ 0,966	+ 0,396	+ 0,935	+ 0,954	+ 0,991
0	$\pi/3$	+ 0,870	+ 0,877	+ 0,835	+ 0,887	+ 0,880	+ 0,862	+ 0,816	+ 0,904
+ 2	$\pi/3$	— 0,587	+ 0,045	+ 0,189	+ 0,769	— 0,426	— 0,070	+ 0,321	+ 0,747
— 2	$\pi/2$	— 0,318	+ 0,690	+ 0,664	+ 0,986	— 0,119	+ 0,610	+ 0,749	+ 0,987
0	$\pi/2$	+ 0,976	+ 1,040	+ 0,972	+ 1,018	+ 0,984	+ 1.028	+ 0,950	+ 1,036
+ 2	$\pi/2$	— 0,168	+ 0,548	+ 0,620	+ 1,022	+ 0,050	+ 0,440	+ 0,694	+ 1,036
— 2	$2\pi/3$	— 0,752	+ 0,219	+ 0,216	+ 0,742	— 0,602	+ 0,121	+ 0,344	+ 0,719
0	$2\pi/3$	+ 0,820	+ 0,925	+ 0,849	+ 0,875	+ 0,824	+ 0,918	+ 0,830	+ 0,890
+ 2	$2\pi/3$	+ 0,297	+ 0,905	+ 0,885	+ 1,001	+ 0,512	+ 0,832	+ 0,881	+ 1,047
— 2	$5\pi/6$	— 0,985	— 0,311	— 0,290	+ 0,299	— 0,924	— 0,400	— 0,154	+ 0,258
0	$5\pi/6$	+ 0,445	+ 0,562	+ 0,498	+ 0,499	+ 0,444	+ 0,562	+ 0,487	+ 0,506
+ 2	$5\pi/6$	+ 0,682	+ 1,019	+ 0,913	+ 0,712	+ 0,837	+ 1,001	+ 0,832	+ 0,778

Tabelle 10. $\frac{1}{a}\,Y(x,t) - \frac{1}{a}\,Y_0(x)$ (ohne Tauchbewegung).

x/a	ωt	Beispiel 1a		Beispiel 1b		Beispiel 3a		Beispiel 3b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
− 2	0	+ 0,979	+ 0,735	+ 0,787	+ 0,186	+ 1,010	+ 0,802	+ 0,669	+ 0,230
0	0	+ 0,100	− 0,112	+ 0,122	− 0,072	+ 0,074	− 0,080	+ 0,088	− 0,060
+ 2	0	− 0,980	− 0,798	− 0,402	− 0,448	− 0,990	− 0,856	− 0,390	− 0,442
− 2	$\pi/6$	+ 0,682	+ 0,993	+ 0,973	+ 0,685	+ 0,814	+ 1,003	+ 0,935	+ 0,709
0	$\pi/6$	+ 0,595	+ 0,409	+ 0,552	+ 0,481	+ 0,567	+ 0,435	+ 0,537	+ 0,481
+ 2	$\pi/6$	− 0,866	− 0,504	+ 0,046	+ 0,081	− 0,805	− 0,554	+ 0,079	+ 0,089
− 2	$\pi/3$	+ 0,201	+ 0,985	+ 0,897	+ 1,000	+ 0,399	+ 0,934	+ 0,951	+ 0,999
0	$\pi/3$	+ 0,930	+ 0,820	+ 0,833	+ 0,904	+ 0,908	+ 0,833	+ 0,842	+ 0,894
+ 2	$\pi/3$	− 0,519	− 0,075	+ 0,481	+ 0,588	− 0,405	− 0,104	+ 0,527	+ 0,597
− 2	$\pi/2$	− 0,332	+ 0,712	+ 0,582	+ 1,048	− 0,123	+ 0,616	+ 0,711	+ 1,021
0	$\pi/2$	+ 1.016	+ 1,012	+ 0,892	+ 1,086	+ 1,006	+ 1,008	+ 0,922	+ 1,066
+ 2	$\pi/2$	− 0,033	+ 0,374	+ 0,788	+ 0,938	+ 0,104	+ 0,374	+ 0,834	+ 0,944
− 2	$2\pi/3$	− 0,777	+ 0,249	+ 0,111	+ 0,814	− 0,611	+ 0,132	+ 0,281	+ 0,769
0	$2\pi/3$	+ 0,830	+ 0.932	+ 0,711	+ 0,976	+ 0,834	+ 0,913	+ 0,754	+ 0,954
+ 2	$2\pi/3$	+ 0,461	+ 0,723	+ 0,883	+ 1,036	+ 0,585	+ 0,752	+ 0,917	+ 1,039
− 2	$5\pi/6$	− 1,014	− 0,281	− 0,391	+ 0,363	− 0,936	− 0,387	− 0,223	+ 0,311
0	$5\pi/6$	+ 0,421	+ 0,603	+ 0,340	+ 0,605	+ 0,439	+ 0,573	+ 0,385	+ 0,585
+ 2	$5\pi/6$	+ 0,832	+ 0,878	+ 0,742	+ 0,857	+ 0,909	+ 0,928	+ 0,755	+ 0,855

Für eine kurze Diskussion der erhaltenen Ergebnisse ist es zunächst notwendig, sich wenigstens ungefähr über den Gültigkeitsbereich der Theorie klar zu werden. Die einschneidendste Vereinfachung bei der vorgelegten Theorie liegt in der Tatsache, daß wir die Randbedingung der freien Wasseroberfläche nur längs der Ebene $y = 0$ erfüllen konnten und nicht längs der genauen wellenförmigen Oberfläche. Durch diese Wellenform und die Tauchbewegung des Flügels schwankt der Abstand des Flügels von der freien Wasseroberfläche periodisch, und diese Abstandsänderungen wurden in unserer Theorie vernachlässigt. Bei Untersuchungen im Rahmen der stationären Theorie der Arbeit I hat sich gezeigt, daß (bei den *Froude*schen Zahlen unserer Beispiele) eine Halbierung bzw. Verdoppelung des Flügelabstandes von der freien Wasseroberfläche eine Zirkulationsänderung der Größenordnung von etwa 15% bis 18% bedingt. Wir wollen daher als ungefähre Grenze für den Gültigkeitsbereich der hier mitgeteilten Ergebnisse folgendes festsetzen: Ist h der mittlere Abstand des Flügels von der freien Wasseroberfläche, so soll der Maximalabstand bei den periodischen Schwankungen nicht größer als $1{,}25\,h$ und der Minimalabstand nicht kleiner als $0{,}75\,h$ sein. Dann ist nach den in der stationären Theorie gemachten Erfahrungen zu vermuten, daß der Fehler bei den Ergebnissen des instationären Anteils der Theorie in der Größenordnung von 10% bleibt. Eine genaue Aussage über diesen Fehler läßt sich natürlich erst machen, wenn es gelingt, eine im obigen Sinne exakte Theorie zu entwickeln. Dieses ist bisher nicht gelungen, da die mathematischen Schwierigkeiten zu groß waren.

Aus Tabelle 9 und 10 erkennt man, daß die Amplituden des instationären Anteils der freien Wasseroberfläche über dem Flügel bei allen Beispielen etwa von der Größenordnung $\varepsilon\,h$ sind ($a = h$). Die Amplitude der Tauchbewegung (Tabelle 8) fällt demgegenüber bei den Beispielen 1a und 3a nicht ins Gewicht; für Beispiel 1b und 3b ist sie jedoch mit zu berücksichtigen; und zwar wirkt die Tauchbewegung im Fall 1) im Sinne einer Verstärkung der zeitlichen Abstandsschwankung Flügel-Wasseroberfläche und im Fall 2) im Sinne einer Verminderung. Der Gültigkeitsbereich der erhaltenen Ergebnisse liegt also gemäß unserer obigen Festsetzung für die Beispiele ohne Tauchbewegung und Beispiel 1a und 3a mit Tauchbewegung bei $\varepsilon \lesssim 0{,}25$. Dagegen kann für Beispiel 1b und 3b mit Tauchbewegung im Fall 2 (d. h. größere Wellenlänge der Anströmung) noch $\varepsilon = 0{,}35$ zugelassen werden, im Fall 1 (d. h. kleinere Wellenlänge der Anströmung) höchstens $\varepsilon = 0{,}18$.

Entsprechend der wellenförmigen Anströmung ist für den gleichen Zeitpunkt (d. h. bei einer Momentaufnahme) die Verformung der Wasseroberfläche im Fall 1) stets steiler als im Fall 2). Auch hier sind natürlich der Gültigkeit der Theorie insofern Grenzen gesetzt, als Anströmungswellen, bei denen das Verhältnis $\frac{u_0^2}{g\,a}\,\frac{\pi}{\mu_{1,2}}$ von Wellenlänge zu Flügeltiefe zu klein wird[1] nur mit

[1] Auch hier ist es natürlich sehr schwer, eine genaue Grenze anzugeben, da es eine Theorie mit Berücksichtigung der Krümmung der Wasseroberfläche in der Randbedingung bisher nicht gibt. Auf jeden Fall muß man jedoch prinzipiell die genannte Einschränkung im Auge behalten, wenn man die Zuverlässigkeit der Ergebnisse beurteilen will. Vgl. auch Arbeit I, Ziff. 6.

noch verkleinerten Amplituden behandelt werden können. Hier ist für

Beispiel 1a: $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_1} = 3{,}36$, $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_2} = 7{,}43$; Beispiel 1b: $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_1} = 7{,}62$, $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_2} = 29{,}55$,

Beispiel 3a: $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_1} = 3{,}77$, $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_2} = 6{,}62$; Beispiel 3b: $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_1} = 9{,}25$, $\frac{u_0^2}{g\,a}\frac{\pi}{\mu_2} = 24{,}36$.

Bezogen auf den stationären Mittelwert Δ_0 betragen die instationären Schwankungen der Flügelzirkulation gemäß Tabelle 4 (dabei wurde überall $\varepsilon = 0{,}25$ gesetzt):

mit Tauchbewegung

Beispiel 1a: 1) 12%, 2) 13%; Beispiel 1b: 1) 7%, 2) 5%,
Beispiel 3a: 1) 10%, 2) 11%; Beispiel 3b: 1) 11%, 2) 7%,

ohne Tauchbewegung

Beispiel 1a: 1) 22%, 2) 24%; Beispiel 1b: 1) 33%, 2) 23%,
Beispiel 3a: 1) 13%, 2) 14%; Beispiel 3b: 1) 19%, 2) 15%.

Man erkennt daraus wieder den stabilisierenden Einfluß der Tauchbewegung; und zwar ist dieser um so ausgeprägter je kleiner die Frequenzzahl Ω ist. Entsprechend ist ja auch die Tauchbewegung gemäß Tabelle 8 am stärksten für Beispiel 1b und am schwächsten für Beispiel 3a.

Ein analoges Verhalten wie die Flügelzirkulation zeigt gemäß Tabelle 5 auch die Auftriebskraft K_y. Kleine Unterschiede zwischen Γ und K_y sind durch die zur Hauptanströmung u_0 hinzutretenden Störgeschwindigkeiten bedingt [Vgl. (II, 37)]. Auch der Wellenwiderstand K_x hat gemäß Tabelle 6 gewisse periodische Schwankungen, auf deren Größe die Tauchbewegung aber keinen merklichen Einfluß ausübt.

8. Zahlenbeispiele von zwei hintereinander fahrenden Flügeln. Auch bei den vier folgenden Beispielen handelt es sich um Flügel mit dem Plattenprofil $f_1'(x_1) = f_2'(x_2) = -0{,}1 = \text{konst.}$ und $a_1 = a_2 = a$. Ferner sei für

Beispiel 4a: $a\,g/u_0^2 = 0{,}1$, $h_1\,g/u_0^2 = 0{,}1$, $h_2 g/u_0^2 = 0{,}05$, $\Omega = 2\pi$, $L = 20\,a$, $M\,L^2/\Theta = 10$. [1]

Beispiel 4b: $a\,g/u_0^2 = 0{,}1$, $h_1\,g/u_0^2 = 0{,}1$, $h_2 g/u_0^2 = 0{,}05$, $\Omega = \frac{2}{3}\pi$, $L = 20\,a$, $M\,L^2/\Theta = 10$.

Beispiel 5a: $a\,g/u_0^2 = 0{,}05$, $h_1\,g/u_0^2 = 0{,}05$, $h_2 g/u_0^2 = 0{,}025$, $\Omega = 4\pi$, $L = 20\,a$, $M\,L^2/\Theta = 10$.

Beispiel 5b: $a\,g/u_0^2 = 0{,}05$, $h_1\,g/u_0^2 = 0{,}05$, $h_2 g/u_0^2 = 0{,}025$, $\Omega = \frac{4}{3}\pi$, $L = 20\,a$; $M\,L^2/\Theta = 10$.

Die Berechnung des stationären Anteils der Beispiele 4a, 4b bzw. 5a, 5b wurde bereits als Beispiel 4 bzw. 5 in Arbeit I, Ziff. 10 durchgeführt, und alle wesentlichen Größen, insbesondere die stationären Mittelwerte der Flügelzirkulationen $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_0^{(2)}$ (in Arbeit I mit Γ_1, Γ_2 bezeichnet) und der Wasseroberfläche, können von dort unverändert übernommen werden.

Die Werte von $\mu_1, \mu_2, \alpha, \beta$ sind für die Beispiele 4a, 4b, 5a, 5b die gleichen wie für die Beispiele 1a, 1b, 3a, 3b aus Ziff. 7.

Bei der Auswertung der Theorie gehen wir auch von der Formel (28) aus, die die Form der freien Wasseroberfläche weit vor den Flügeln wiedergibt, und betrachten bei jedem Beispiel die zwei charakteristischen Hauptfälle

$$\text{Fall 1):}\quad B_1^* = \varepsilon,\quad B_2^* = 0, \qquad \text{Fall 2):}\quad B_1^* = 0,\quad B_2^* = \varepsilon.$$

Aus 1) und 2) können durch lineare Superposition beliebige weitere Fälle zusammengesetzt werden.

Für die Berechnung der instationären Zirkulationskoeffizienten wurde die 1/4—3/4-Punkt-Methode verwendet. Dabei haben wir die Zwei-Flügel-Systeme nur mit Berücksichtigung der Stampf- und Tauchbewegung durchgerechnet, da diese bei Tragflügelbooten gerade wesentlich ist. Bei festgehaltenen Flügeln hätte sich ohnehin für Flügel *1* genau das gleiche Resultat ergeben wie bei den entsprechenden Einzelflügeln ohne Tauchbewegung.

Tabelle 11 zeigt die Funktionen $\Gamma_1(t) - \Delta_0^{(1)}$ bzw. $\Gamma_2(t) - \Delta_0^{(2)}$ d. h. den instationären Anteil der Flügelzirkulationen in Einheiten von $a\,u_0\,\varepsilon$. Die Tabellen 12 und 13 geben den Verlauf der für die Tauch- und Stampfbewegung der Flügel maßgebenden Funktionen $\frac{1}{a}\eta(t) - \frac{1}{a}\eta_0$ und $\varphi(t)$ in Einheiten von ε wieder. Vgl. Formeln (14) und (18).

[1] Der Wert $M\,L^2/\Theta = 10$ entspricht einem mittleren bei Tragflügelbooten vorkommenden Wert.

Der instationäre Anteil $\frac{1}{a} Y(x,t) - \frac{1}{a} Y_0(x)$ der freien Wasseroberfläche ist in Tabelle 14 enthalten berechnet für die drei Punkte $x = -2a, 0, +2a$ in der Umgebung des Flügels *1*, und in Tabelle 15 für die drei Punkte $x = 18a, 20a, 22a$ in der Umgebung des Flügels *2*. (In Einheiten von ε.) Dabei ist $\frac{1}{a} Y_0(x)$ der bereits in Arbeit I berechnete stationäre Mittelwert der freien Wasseroberfläche (vgl. dort Tabelle 7*, Beispiele 4 und 5).

Für den Geltungsbereich unserer Ergebnisse erhalten wir bedingt durch die Strömungsverhältnisse bei Flügel *2* ein ungünstigeres Bild als bei den Einzelflügeln. Zunächst ergibt sich aus Tabelle 14 und 15, daß die Amplituden des instationären Anteils der freien Wasseroberfläche über Flügel *1* bzw. Flügel *2* von der Größenordnung εh_1 bzw. $2\varepsilon h_2$ sind ($a = h_1 = 2h_2$). Weiter sind die Amplituden der Tauch- und Stampfbewegung zu berücksichtigen. Die durch die Tauch- und Stampfbewegung bewirkte Auslenkung gegenüber der stationären Mittellage ist bei Flügel *1* gegeben durch $\frac{1}{a}[\eta(t) - \eta_0 - L_1 \varphi(t)]$ und bei Flügel *2* durch $\frac{1}{a}[\eta(t) - \eta_0 + L_2 \varphi(t)]$.

Für Beispiel 4a und 4b ist nach (16) $L_1 = 10{,}5\,a$, $L_2 = 9{,}5\,a$, und für Beispiel 5a und 5b ist $L_1 = 8{,}1\,a$, $L_2 = 11{,}9\,a$.

Man erkennt: Relativ unerheblich für die zeitlichen Schwankungen des Abstandes Flügel-Wasseroberfläche ist die Tauch- und Stampfbewegung bei den Beispielen 4a und 5a mit den großen Ω-Werten, während sie bei den anderen Beispielen teilweise große Bedeutung hat. Und zwar wirkt die Bewegung des Flügels *1* im Fall 1 verstärkend und im Fall 2 teils verstärkend teils abschwächend

Tabelle 11. $\Gamma_j(t) - \Lambda_0^{(j)}$.

	ωt	Beispiel 4a		Beispiel 4b		Beispiel 5a		Beispiel 5b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
Flügel 1 ($j = 1$)	0	− 0,147	+ 0,094	− 0,088	+ 0,052	− 0,106	+ 0,099	− 0,117	+ 0,079
	$\pi/6$	− 0,084	+ 0,063	− 0,063	+ 0,058	− 0,056	+ 0,056	− 0,052	+ 0,060
	$\pi/3$	+ 0,001	+ 0,016	− 0,020	+ 0,048	+ 0,009	− 0,002	+ 0,026	+ 0,024
	$\pi/2$	+ 0,086	− 0,035	+ 0,027	+ 0,025	+ 0,072	− 0,060	+ 0,098	− 0,018
	$2\pi/3$	+ 0,148	− 0,078	+ 0,068	− 0,004	+ 0,115	− 0,101	+ 0,143	− 0,055
	$5\pi/6$	+ 0,170	− 0,099	+ 0,090	− 0,032	+ 0,128	− 0,115	+ 0,150	− 0,077
Flügel 2 ($j = 2$)	0	− 0,157	+ 0,064	− 0,113	+ 0,069	+ 0,119	− 0,086	− 0,097	+ 0,047
	$\pi/6$	− 0,077	+ 0,140	− 0,122	+ 0,072	+ 0,129	− 0,026	− 0,057	+ 0,068
	$\pi/3$	+ 0,024	+ 0,179	− 0,098	+ 0,055	+ 0,104	+ 0,041	− 0,002	+ 0,070
	$\pi/2$	+ 0,119	+ 0,170	− 0,048	+ 0,024	+ 0,051	+ 0,098	+ 0,053	+ 0,054
	$2\pi/3$	+ 0,182	+ 0,115	+ 0,015	− 0,014	− 0,016	+ 0,128	+ 0,095	+ 0,024
	$5\pi/6$	+ 0,196	+ 0,030	+ 0,074	− 0,048	− 0,078	+ 0,124	+ 0,111	− 0,013

Tabelle 12. $\frac{1}{a}\eta(t) - \frac{1}{a}\eta_0$.

ωt	Beispiel 4a		Beispiel 4b		Beispiel 5a		Beispiel 5b	
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
0	+ 0,107	− 0,055	+ 0,635	− 0,382	− 0,002	− 0,002	+ 0,358	− 0,211
$\pi/6$	+ 0,057	− 0,072	+ 0,583	− 0,409	− 0,014	− 0,006	+ 0,184	− 0,213
$\pi/3$	− 0,009	− 0,069	+ 0,374	− 0,326	− 0,021	− 0,007	− 0,040	− 0,159
$\pi/2$	− 0,072	− 0,047	+ 0,065	− 0,156	− 0,023	− 0,007	− 0,253	− 0,062
$2\pi/3$	− 0,116	− 0,013	− 0,261	+ 0,056	− 0,019	− 0,005	− 0,399	+ 0,052
$5\pi/6$	− 0,129	+ 0,024	− 0,518	+ 0,253	− 0,009	− 0,002	− 0,437	+ 0,152

Tabelle 13. $\varphi(t)$.

ωt	Beispiel 4a		Beispiel 4b		Beispiel 5a		Beispiel 5b	
	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
0	− 0,0003	+ 0,0032	+ 0,0128	− 0,0091	− 0,0106	+ 0,0085	+ 0,0086	+ 0,0036
$\pi/6$	− 0,0013	− 0,0060	+ 0,0405	− 0,0063	− 0,0092	+ 0,0036	+ 0,0107	− 0,0134
$\pi/3$	− 0,0020	− 0,0136	+ 0,0574	− 0,0019	− 0,0054	− 0,0024	+ 0,0099	− 0,0268
$\pi/2$	− 0,0021	− 0,0175	+ 0,0589	+ 0,0030	− 0,0001	− 0,0077	+ 0,0064	− 0,0330
$2\pi/3$	− 0,0017	− 0,0168	+ 0,0446	+ 0,0072	+ 0,0052	− 0,0109	+ 0,0012	− 0,0304
$5\pi/6$	− 0,0008	− 0,0116	+ 0,0184	+ 0,0094	+ 0,0092	− 0,0112	− 0,0043	− 0,0196

Tabelle 14. $\frac{1}{a}\,Y(x,t) - \frac{1}{a}\,Y_0(x)$.

x/a	ωt	Beispiel 4a		Beispiel 4b		Beispiel 5a		Beispiel 5b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
− 2	0	+ 0,953	+ 0,748	+ 0,733	+ 0,202	+ 0,992	+ 0,815	+ 0,613	+ 0,254
0	0	+ 0,051	− 0,032	+ 0,010	− 0,018	+ 0,038	− 0,035	− 0,007	− 0,011
+ 2	0	− 0,875	− 0,783	− 0,666	− 0,249	− 0,918	− 0,878	− 0,541	− 0,316
− 2	$\pi/6$	+ 0,666	+ 0,987	+ 0,963	+ 0,669	+ 0,802	+ 1,006	+ 0,903	+ 0,713
0	$\pi/6$	+ 0,531	+ 0,477	+ 0,493	+ 0,490	+ 0,520	+ 0,480	+ 0,466	+ 0,505
+ 2	$\pi/6$	− 0,841	− 0,387	− 0,246	+ 0,262	− 0,796	− 0,512	− 0,119	+ 0,218
− 2	$\pi/3$	+ 0,202	+ 0,962	+ 0,935	+ 0,957	+ 0,398	+ 0,928	+ 0,950	+ 0,982
0	$\pi/3$	+ 0,868	+ 0,859	+ 0,844	+ 0,866	+ 0,863	+ 0,867	+ 0,814	+ 0,885
+ 2	$\pi/3$	− 0,581	+ 0,113	+ 0,241	+ 0,703	− 0,461	− 0,008	+ 0,335	+ 0,693
− 2	$\pi/2$	− 0,319	+ 0,679	+ 0,656	+ 0,988	− 0,113	+ 0,600	+ 0,743	+ 0,987
0	$\pi/2$	+ 0,972	+ 1,011	+ 0,969	+ 1,010	+ 0,975	+ 1,021	+ 0,943	+ 1,028
+ 2	$\pi/2$	− 0,166	+ 0,582	+ 0,663	+ 0,955	− 0,002	+ 0,497	+ 0,699	+ 0,983
− 2	$2\pi/3$	− 0,752	+ 0,214	+ 0,202	+ 0,755	− 0,594	+ 0,113	+ 0,338	+ 0,728
0	$2\pi/3$	+ 0,817	+ 0,892	+ 0,834	+ 0,884	+ 0,826	+ 0,901	+ 0,820	+ 0,896
+ 2	$2\pi/3$	+ 0,294	+ 0,895	+ 0,907	+ 0,952	+ 0,457	+ 0,870	+ 0,875	+ 1,009
− 2	$5\pi/6$	− 0,985	− 0,308	− 0,306	+ 0,319	− 0,916	− 0,406	− 0,159	+ 0,273
0	$5\pi/6$	+ 0,442	+ 0,534	+ 0,476	+ 0,521	+ 0,455	+ 0,540	+ 0,478	+ 0,523
+ 2	$5\pi/6$	+ 0,675	+ 0,969	+ 0,908	+ 0,693	+ 0,794	+ 1,009	+ 0,818	+ 0,765

Tabelle 15. $\frac{1}{a}\,Y(x,t) - \frac{1}{a}\,Y_0(x)$.

x/a	ωt	Beispiel 4a		Beispiel 4b		Beispiel 5a		Beispiel 5b	
		Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2	Fall 1	Fall 2
18	0	+ 0,800	− 0,952	− 0,812	− 0,982	− 0,681	− 0,782	+ 0,168	− 0,766
20	0	+ 0,206	− 0,874	− 0,823	− 0,870	+ 0,589	+ 0,100	− 0,433	− 0,603
22	0	− 0,784	+ 0,071	− 0,222	− 0,750	+ 0,482	+ 1,048	− 0,742	− 0,393
18	$\pi/6$	+ 0,489	− 0,722	− 0,503	− 1,030	− 0,883	− 1,068	+ 0,596	− 0,988
20	$\pi/6$	+ 0,610	− 1,062	− 0,894	− 1,033	+ 0,227	− 0,452	+ 0,016	− 0,938
22	$\pi/6$	− 0,626	− 0,510	− 0,595	− 1,032	+ 0,690	+ 0,745	− 0,482	− 0,855
18	$\pi/3$	+ 0,047	− 0,298	− 0,059	− 0,803	− 0,848	− 1,068	+ 0,865	− 0,946
20	$\pi/3$	+ 0,851	− 0,964	− 0,725	− 0,920	− 0,195	− 0,883	+ 0,459	− 1,021
22	$\pi/3$	− 0,300	− 0,955	− 0,807	− 1,037	+ 0,714	+ 0,243	− 0,094	− 1,088
18	$\pi/2$	− 0,408	+ 0,206	+ 0,401	− 0,360	− 0,585	− 0,782	+ 0,902	− 0,650
20	$\pi/2$	+ 0,864	− 0,608	− 0,362	− 0,560	− 0,565	− 1,078	+ 0,780	− 0,831
22	$\pi/2$	+ 0,106	− 1,143	− 0,804	− 0,765	+ 0,546	− 0,324	+ 0,320	− 1,030
18	$2\pi/3$	− 0,753	+ 0,655	+ 0,753	+ 0,179	− 0,166	− 0,286	+ 0,697	− 0,180
20	$2\pi/3$	+ 0,645	− 0,089	+ 0,098	− 0,050	− 0,784	− 0,984	+ 0,892	− 0,418
22	$2\pi/3$	+ 0,484	− 1,025	− 0,585	− 0,288	+ 0,233	− 0,804	+ 0,648	− 0,696
18	$5\pi/6$	− 0,897	+ 0,928	+ 0,903	+ 0,670	+ 0,297	+ 0,286	+ 0,305	+ 0,338
20	$5\pi/6$	+ 0,254	+ 0,453	+ 0,531	+ 0,473	− 0,792	− 0,626	+ 0,765	+ 0,107
22	$5\pi/6$	+ 0,732	− 0,633	− 0,209	+ 0,267	− 0,144	− 1,069	+ 0,802	− 0,175

auf die durch die wellenförmige Wasseroberfläche bedingten Abstandsschwankungen ein. Die Bewegung des Flügels *2* verstärkt im Fall 1 und vermindert im Fall 2 die Abstandsschwankungen.

Das für den Gültigkeitsbereich der vorliegenden Theorie ungünstigste Verhalten zeigt Beispiel 4b Fall 1: Hier betragen die Abstandsschwankungen zwischen Flügel *2* und der Wasseroberfläche maximal etwa $\pm\, 4\, h_2 \varepsilon$. Schon für $\varepsilon = 0{,}25$ würde der Flügel also die Wasseroberfläche berühren, und dieses ist nach den unserer Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen natürlich ganz unzulässig.

Wenn wir für den Gültigkeitsbereich der Ergebnisse die gleichen Grenzen festlegen wie bei den Einzelflügeln (vgl. unsere Überlegungen auf S. 215), so erhalten wir ungefähr folgende obere Schranken für die ε-Werte: Beispiele 4a und 5a $\varepsilon \approx 1/8$, Beispiel 4b Fall 1 $\varepsilon \approx 0{,}065$, Fall 2 $\varepsilon \approx 0{,}21$. Beispiel 5b Fall 1 $\varepsilon \approx 0{,}10$, Fall 2 $\varepsilon \approx 0{,}20$.

Dabei müssen wir uns an den Verhältnissen bei Flügel *2* als den ungünstigeren orientieren.

Tabelle 11 zeigt, daß die Amplituden der instationären Schwankungen der Flügelzirkulation ungefähr von der gleichen Größenordnung sind wie bei den entsprechenden Einzelflügeln mit Tauchbewegung. Das gleiche gilt für die Tauchbewegung selbst; diese ist wieder bei Beispiel 4b (mit der kleinsten Frequenzzahl Ω) am stärksten ausgeprägt, während sie für Beispiel 5a (größter Ω-Wert) fast ganz verschwindet. Die durch Tabelle 13 gegebene Stampfbewegung hat nur scheinbar eine

kleinere Größenordnung als die Tauchbewegung; denn die q-Werte müssen ja noch mit den Hebelarmen L_1 bzw. L_2 multipliziert werden, die von der Größenordnung 10 a sind.

Trotz ihres bereits recht komplizierten Aufbaues stellt die instationäre Theorie der vorliegenden Arbeit sowie der Arbeit II noch eine erhebliche Vereinfachung des Problemes dar. Für eine genaue Behandlung müßte die Randbedingung (II, 2) längs der wellenförmigen Wasseroberfläche erfüllt und die Schwankung des Flügelabstandes von der Wasseroberfläche berücksichtigt werden. Außerdem wäre unter Umständen eine genauere Erfassung der Tauch- und Stampfbewegung der Flügel notwendig, z. B. mit Berücksichtigung der Dämpfungswirkung des Wassers. Hierbei sei jedoch darauf hingewiesen, daß *Weinblum*[1] in einer überwiegend schwingungsmechanischen Untersuchung (ohne hydrodynamische Berücksichtigung der freien Wasseroberfläche und der freien Wirbel) über das Tauchen und Stampfen von Tragflächensystemen in regelmäßigem Seegang im wesentlichen dieselben Bewegungsgleichungen verwendet wie wir. Diese haben sich für Stabilitätsrechnungen bewährt, wie eine neue Arbeit von *Kaplan* und *Jacobs*[2] zeigt, die auf den *Weinblum*schen Gleichungen beruht. In einer weiteren Arbeit[3] werden diese Gleichungen dadurch ergänzt, daß die instationären Kraftanteile nicht mehr quasistationär nach der Methode der Auftriebsbeiwerte berechnet werden[1], sondern mit den Formeln der instationären Tragflügeltheorie, allerdings ohne jede Berücksichtigung der freien Wasseroberfläche.

Aus dem Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

(Eingegangen am 14. Juni 1960.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. habil. *W. H. Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90

[1] Nach *G. Weinblum*, Schiffstechnik 5 (1958) S. 2 (aber in unserer Bezeichnungsweise) lauten die Bewegungsgleichungen für das Tauchen und Stampfen, wenn ein Austauchen der Tragflächen aus dem Wasser nicht zugelassen wird,

$$m\,\ddot{\eta} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4\,, \qquad \Theta\,\ddot{\varphi} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4\,;$$

mit (c'_{a_1}, c'_{a_2} sind die Auftriebsbeiwerte der Flügel)

$$K_1 = \frac{\varrho}{2}\,u_0^2\left(2\,a_1\,c'_{a_1}\,\frac{v_1}{u_0} + 2\,a_2\,c'_{a_2}\,\frac{v_2}{u_0}\right), \qquad K_2 = -\,\frac{\varrho}{2}\,u_0^2\left(2\,a_1\,c'_{a_1}\,\frac{\dot\eta}{u_0} + 2\,a_2\,c'_{a_2}\,\frac{\dot\eta}{u_0}\right),$$

$$K_3 = \frac{\varrho}{2}\,u_0^2\left(2\,a_1\,c'_{a_1}\,\frac{L_1\dot\varphi}{u_0} - 2\,a_2\,c'_{a_2}\,\frac{L_2\dot\varphi}{u_0}\right), \qquad K_4 = -\,\frac{\varrho}{2}\,u_0^2\,(2\,a_1\,c'_{a_1}\,\varphi + 2\,a_2\,c'_{a_2}\,\varphi)\,,$$

$$M_1 = -\,\frac{\varrho}{2}\,u_0^2\left(2\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1\,\frac{v_1}{u_0} - 2\,a_2\,c'_{a_2}\,L_2\,\frac{v_2}{u_0}\right), \quad M_2 = \frac{\varrho}{2}\,u_0^2\left(2\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1\,\frac{\dot\eta}{u_0} - 2\,a_2\,c'_{a_2}\,L_2\,\frac{\dot\eta}{u_0}\right),$$

$$M_3 = -\,\frac{\varrho}{2}\,u_0^2\left(2\,a_1\,c'_{a_1}\,\frac{L_1^2\dot\varphi}{u_0} + 2\,a_2\,c'_{a_2}\,\frac{L_2^2\dot\varphi}{u_0}\right), \quad M_4 = \frac{\varrho}{2}\,u_0^2\,(2\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1\varphi - 2\,a_2\,c'_{a_2}\,L_2\varphi)\,.$$

Dabei ist K_1 die anregende Kraft der Wellen mit v_1/u_0 und v_2/u_0 als den an Flügel 1 und 2 wirksamen Anströmwinkeln der Wellengeschwindigkeit. K_2 ist die stabilisierende Kraft, die durch die Tauchgeschwindigkeit bedingt ist. K_3 ist die durch die Stampfgeschwindigkeit an den Flügeln induzierte Kraft. Die Kraft K_4 schließlich ist durch den infolge der Stampfbewegung geänderten Neigungswinkel der Flügel bedingt; dabei soll für die zeitliche Mittellage $\varphi = 0$ angenommen werden. M_1 bis M_4 sind die den Kräften K_1 bis K_4 entsprechenden Drehmomente. Man erhält so für die Tauch- und Stampfbewegung die folgenden simultanen Differentialgleichungen:

$$m\,\ddot\eta + \varrho\,u_0\,(a_1\,c'_{a_1} + a_2\,c'_{a_2})\,\dot\eta + \varrho\,u_0\,(-\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1 + a_2\,c'_{a_2}\,L_2)\,\dot\varphi + \varrho\,u_0^2\,(a_1\,c'_{a_1} + a_2\,c'_{a_2})\,\varphi = \varrho\,u_0\,(a_1\,c'_{a_1}\,v_1 + a_2\,c'_{a_2}\,v_2)\,,$$

$$\Theta\,\ddot\varphi + \varrho\,u_0\,(a_1\,c'_{a_1}\,L_1^2 + a_2\,c'_{a_2}\,L_2^2)\,\dot\varphi + \varrho\,u_0\,(-\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1 + a_2\,c'_{a_2}\,L_2)\,\dot\eta + \varrho\,u_0^2\,(-\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1 + a_2\,c'_{a_2}\,L_2)\,\varphi = \varrho\,u_0\,(-\,a_1\,c'_{a_1}\,L_1\,v_1 + a_2\,c'_{a_2}\,L_2\,v_2)\,.$$

Führen wir nun für den instationären Anteil der Flügelzirkulation die Bezeichung gemäß Formel (13) ein, so wird entsprechend dem aus der Methode der Auftriebsbeiwerte bekannten Zusammenhang zwischen Zirkulation und Anströmwinkel

$$A_1^{(1)}\,e^{i\omega t} + \bar A_1^{(1)}\,e^{-i\omega t} = a_1\,c'_{a_1}\,(v_1 - \dot\eta + L_1\,\dot\varphi - u_0\,\varphi)\,,$$

$$A_1^{(2)}\,e^{i\omega t} + \bar A_1^{(2)}\,e^{-i\omega t} = a_2\,c'_{a_2}\,(v_2 - \dot\eta - L_2\,\dot\varphi - u_0\,\varphi)\,.$$

Durch Einsetzen dieser Relationen in das obige Differentialgleichungssystem ergeben sich genau unsere in Ziff. 3 abgeleiteten Bewegungsgleichungen.

[2] *P. Kaplan* u. *W. Jacobs*, Stevens Institute of Technology, Davidson Laboratory Report 704 (1959), Hoboken, N.J.

[3] *F. Ogilvie*, J. ship research 3 (1959/60), Heft 3.

Ein neues Variationsprinzip in der Elastizitätstheorie*

Von D. Rüdiger

1. Einleitung. Im folgenden wird ein Extremalprinzip für einen anisotropen, elastischen Körper vom Volumen R und der Oberfläche F (Abb. 1) angegeben. Dieser wird auf allgemeine Koordinaten

$$x^\lambda \text{ bzw. } x^\mu, x^\nu, x^\varrho \; (\lambda, \mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3)$$

bezogen. Normalenvektor der Oberfläche in kontra- und kovarianter Darstellung ist n^λ, n_λ. Das anisotrope Medium hat den Elastizitätstensor

$$E^{\lambda\mu\nu\varrho} = E^{\nu\varrho\lambda\mu} = E^{\varrho\nu\lambda\mu} = E^{\varrho\nu\mu\lambda}$$

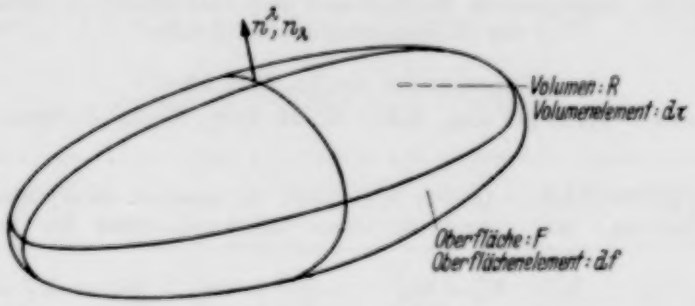

Abb. 1. Elastischer Körper.

mit den angegebenen Symmetrieeigenschaften. Das Verschiebungsfeld in kontra- und kovarianter Darstellung ist

$$V^\lambda(x^1, x^2, x^3), \quad V_\lambda(x^1, x^2, x^3).$$

Es gelten das Summationsübereinkommen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} A^\lambda B_\lambda = A^\lambda B_\lambda$$

und die kovarianten Ableitungen

$$V^\lambda|_\mu = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\cdot\mu\nu} V^\nu, \qquad V_\lambda|_\mu = \frac{\partial V_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma^\nu_{\cdot\mu\lambda} V_\nu.$$

Hierin sind $\Gamma^\lambda_{\cdot\mu\nu}$ die *Christoffel*schen Dreiindizessymbole zweiter Art. Als Abkürzungen werden

der Spannungstensor $\sigma^{\lambda\mu} = E^{\lambda\mu\nu\varrho} V_\varrho|_\nu$,

der Spannungsvektor der Oberfläche $t^\mu = E^{\lambda\mu\nu\varrho} V_\varrho|_\nu \, n_\lambda$,

die Divergenz des Spannungstensors $p^\mu = E^{\lambda\mu\nu\varrho} V_\varrho|_{\nu\lambda}$

und die Formänderungsarbeit $A = \frac{1}{2} \int\limits_R \int\int E^{\lambda\mu\nu\varrho} V_\mu|_\lambda \, V_\varrho|_\nu \, d\tau$

eingeführt. Außerdem wird der *Gauß*sche Integralsatz

$$\iiint\limits_R (\,)|_\lambda \, d\tau = \iint\limits_F (\,) \, n_\lambda \, df$$

verwendet.

---

* Vortrag, der auf dem Zehnten Intern. Kongr. f. Angew. Mechanik in Stresa (1960) gehalten wurde.

2. Prinzipé von Green und Castigliano. Es sei eine allgemeine Randwertaufgabe der Grundgleichungen in der Elastizitätstheorie kleiner Verschiebungen

$$E^{\lambda\mu\nu\varrho}\, V_{\varrho|\nu\lambda} + \bar{p}^{\mu} = 0$$

vorgegeben; und zwar sollen im betrachteten Raumteil R die Volumenkraft $\bar{p}^{\mu}$, auf den Teiloberflächen $\overset{1}{G}, \overset{2}{G}, \overset{3}{G}$ die Flächenkräfte $\bar{t}^1$, $\bar{t}^2$, $\bar{t}^3$ und auf den Restflächen $\overset{1}{\bar{G}} = F - \overset{1}{G}$, $\overset{2}{\bar{G}} = F - \overset{2}{G}$

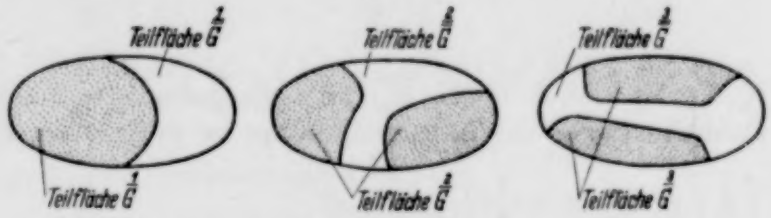

Abb. 2. Teilflächen $\overset{\nu}{\bar{G}}$ und $\overset{\nu}{G}$.

$\overset{3}{\bar{G}} = F - \overset{3}{G}$ die Verschiebungen $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ vorgegeben sein (Abb. 2). Dieser Integrationsaufgabe sind bekanntlich die Variationsprinzipe von *Green*[1]

$$U = A - \iiint_R \bar{p}^{\mu}\, V_{\mu}\, d\tau - \iint_{\overset{1}{G}} \bar{t}^1\, V_1\, df - \iint_{\overset{2}{G}} \bar{t}^2\, V_2\, df - \iint_{\overset{3}{G}} \bar{t}^3\, V_3\, df = \text{Extrem}\,.$$

$$[\delta V_1]_{\overset{1}{\bar{G}}} = 0\,, \qquad [\delta V_2]_{\overset{2}{\bar{G}}} = 0\,, \qquad [\delta V_3]_{\overset{3}{\bar{G}}} = 0$$

und von *Castigliano*

$$-\overset{*}{U} = -A + \iint_{\overset{1}{\bar{G}}} t^1\, \bar{\bar{V}}_1\, df + \iint_{\overset{2}{\bar{G}}} t^2\, \bar{\bar{V}}_2\, df + \iint_{\overset{3}{\bar{G}}} t^3\, \bar{\bar{V}}_3\, df = \text{Extrem.}$$

$$[\delta t^1]_{\overset{1}{G}} = 0\,, \qquad [\delta t^2]_{\overset{2}{G}} = 0\,, \qquad [\delta t^3]_{\overset{3}{G}} = 0\,, \qquad [\delta p^{\mu}]_R = 0$$

äquivalent.

3. Variationsprinzip. Es wird behauptet, daß durch Hinzufügen von

$$Z = -\iint_{\overset{1}{\bar{G}}} t^1\,(V_1 - \bar{\bar{V}}_1)\, df - \iint_{\overset{2}{\bar{G}}} t^2\,(V_2 - \bar{\bar{V}}_2)\, df - \iint_{\overset{3}{\bar{G}}} t^3\,(V_3 - \bar{\bar{V}}_3)\, df$$

zum *Green*schen Prinzip und von

$$-\overset{*}{Z} = \iint_{\overset{1}{\bar{G}}} (t^1 - \bar{t}^1)\, V_1\, df + \iint_{\overset{2}{\bar{G}}} (t^2 - \bar{t}^2)\, V_2\, df + \iint_{\overset{3}{\bar{G}}} (t^3 - \bar{t}^3)\, V_3\, df + \iiint_R (p^{\mu} - \bar{p}^{\mu})\, V_{\mu}\, d\tau\,,$$

zum *Castiglianos*chen Prinzip ein Variationsprinzip

$$\Pi \equiv U + Z = -\left(\overset{*}{U} + \overset{*}{Z}\right) = \text{Extrem.}$$

der Elastizitätstheorie erhalten wird, an dessen benachbarte Verschiebungsfelder hinsichtlich der Randbedingungen keine Forderungen mehr gestellt zu werden brauchen. Das Extremalprinzip lautet, wenn die Werte U, Z bzw. $\overset{*}{U}, \overset{*}{Z}$ eingesetzt werden,

$$\Pi \equiv U + Z = A - \iiint_R \bar{p}^{\mu}\, V_{\mu}\, d\tau - \iint_{\overset{1}{\bar{G}}} \bar{t}^1\, V_1\, df - \iint_{\overset{2}{\bar{G}}} \bar{t}^2\, V_2\, df - \iint_{\overset{3}{\bar{G}}} \bar{t}^3\, V_3\, df -$$

$$- \iint_{\overset{1}{\bar{G}}} t^1\,(V_1 - \bar{\bar{V}}_1)\, df - \iint_{\overset{2}{\bar{G}}} t^2\,(V_2 - \bar{\bar{V}}_2)\, df - \iint_{\overset{3}{\bar{G}}} t^3\,(V_3 - \bar{\bar{V}}_3)\, df = \text{Extrem.} \quad (1)$$

[1] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 1 S. 80. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

bzw.

$$\Pi \equiv -\left(\overset{*}{U}+\overset{*}{Z}\right) = -A + \int\limits_{R}\int\int (p^{\mu}-\bar{p}^{\mu})\, V_{\mu}\, d\tau + \\ + \int\limits_{\overset{1}{G}}\int (t^1-\bar{t}^1)\, V_1\, df + \int\limits_{\overset{2}{G}}\int (t^2-\bar{t}^2)\, V_2\, df + \int\limits_{\overset{3}{G}}\int (t^3-\bar{t}^3)\, V_3\, df + \\ + \int\limits_{\overset{1}{\bar{G}}}\int t^1\, \bar{\bar{V}}_1\, df + \int\limits_{\overset{2}{\bar{G}}}\int t^2\, \bar{\bar{V}}_2\, df + \int\limits_{\overset{3}{\bar{G}}}\int t^3\, \bar{\bar{V}}_3\, df = \text{Extrem.} \qquad (2)$$

Die Funktion $\Pi(V_1, V_2, V_3, \bar{t}^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3, \bar{\bar{V}}_1, \bar{\bar{V}}_2, \bar{\bar{V}}_3)$ wird als potentielle Energie bezeichnet. Die Identität der beiden Formulierungen des Extremalprinzips ist mittels der Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{R}\int\int p^{\mu}\, V_{\mu}\, d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{F}\int v^{\mu}\, V_{\mu}\, df \\ = \frac{1}{2}\int\limits_{R}\int\int p^{\mu}\, V_{\mu}\, d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int t^1\, V_1\, df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int t^2\, V_2\, df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int t^3\, V_3\, df + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{\bar{G}}}\int t^1\, V_1\, df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{\bar{G}}}\int t^2\, V_2\, df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{\bar{G}}}\int t^3\, V_3\, df$$

ohne weiteres zu bestätigen.

Setzt man diese nämlich in $\Pi \equiv U + Z$ bzw. $\Pi \equiv -\left(\overset{*}{U}+\overset{*}{Z}\right)$ ein, so ergibt sich als dritte Formulierung des Variationsprinzips

$$\Pi \equiv U + Z = -\left(\overset{*}{U}+\overset{*}{Z}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{R}\int\int (p^{\mu}-2\,\bar{p}^{\mu})\, V_{\mu}\, d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{G}}\int (t^1-2\,\bar{t}^1)\, V_1\, df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{G}}\int (t^2-2\,\bar{t}^2)\, V_2\, df + \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{G}}\int (t^3-2\,\bar{t}^3)\, V_3\, df - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{1}{\bar{G}}}\int t^1\,(V_1-2\,\bar{\bar{V}}_1)\, df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{2}{\bar{G}}}\int t^2\,(V_2-2\,\bar{\bar{V}}_2)\, df - \frac{1}{2}\int\limits_{\overset{3}{\bar{G}}}\int t^3\,(V_3-2\,\bar{\bar{V}}_3)\, df = \text{Extrem.} \qquad (3)$$

Sie ist für eine Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung besonders gut geeignet[1]. Wenn man an die benachbarten Verschiebungszustände die Bedingung stellt, daß sie die geometrischen Randbedingungen erfüllen, dann entfallen in (1) die Integrale über die Teilflächen $\overset{r}{\bar{G}}$, und das neue Variationsprinzip geht in das *Green*sche über. Fordert man jedoch, daß die benachbarten Verschiebungsfelder die dynamischen Randbedingungen erfüllen und mit der Volumenkraft $\bar{p}^{\mu}$ im Gleichgewicht sind, dann entfallen in (2) die Integrale über die Teilflächen $\overset{r}{\bar{\bar{G}}}$ und über das Körpervolumen R und Π ist mit der Ergänzungsarbeit des *Castigliano*schen Prinzips identisch.

In dem Sonderfall $\overset{1}{G} = \overset{2}{G} = \overset{3}{G} = \bar{G}$ und $\overset{1}{G} = \overset{2}{G} = \overset{3}{G} = F - \bar{G} = \bar{G}$ geht (1) in ein von E. *Reissner*[2] angegebenes Extremalprinzip für eine spezielle dritte Randwertaufgabe über.

---

[1] *D. Rüdiger*, Ing.-Arch. 27 (1960) S. 421.

[2] *E. Reissner*, Sympos. on the Calculus of Variations and its Applications of the American Mathematical Society, April 12, 1956. Vgl. hierzu auch die im Falle großer Verschiebungen gültigen Prinzipe für ein Randwertproblem, bei dem auf der festen Teilfläche $\bar{G}$ sämtliche drei Komponenten des Spannungsvektors $\bar{t}^{\lambda}$ und auf der festen Restfläche $\bar{G}$ alle drei Komponenten des Verschiebungsvektors $\bar{V}^{\lambda}$ vorgegeben sind: *E. Reissner*, J. Math. Phys. 32 (1953) S. 129; *E. Koppe*, Nachr. Akad. d. Wiss. Göttingen, math.-phys. Klasse, II a, (1956) S. 259.

4. Variation der potentiellen Energie. Die Variation der potentiellen Energie Π nach (1) liefert zunächst

$$\begin{aligned}\delta\Pi = 0 = \delta A &- \iiint\limits_R \bar{p}^\mu\,\delta V_\mu\,d\tau - \\ &- \iint\limits_{\frac{1}{G}} \bar{t}^1\,\delta V_1\,df - \iint\limits_{\frac{2}{G}} \bar{t}^2\,\delta V_2\,df - \iint\limits_{\frac{3}{G}} \bar{t}^3\,\delta V_3\,df - \\ &- \iint\limits_{\frac{1}{G}} \delta t^1\,(V_1 - \bar{\bar{V}}_1)\,df - \iint\limits_{\frac{2}{G}} \delta t^2\,(V_2 - \bar{\bar{V}}_2)\,df - \iint\limits_{\frac{3}{G}} \delta t^3\,(V_3 - \bar{\bar{V}}_3)\,df - \\ &- \iint\limits_{\frac{1}{G}} t^1\,\delta V_1\,df - \iint\limits_{\frac{2}{G}} t^2\,\delta V_2\,df - \iint\limits_{\frac{3}{G}} t^3\,\delta V_3\,df\,.\end{aligned}$$

Mit der ersten Variation der Formänderungsarbeit

$$\begin{aligned}\delta A &= \iiint\limits_R E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_\nu\,\delta V_\mu|_\lambda\,d\tau \\ &= -\iiint\limits_R E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_{\nu\lambda}\,\delta V_\mu\,d\tau + \iiint\limits_R (E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_\nu\,\delta V_\mu)|_\lambda\,d\tau\,,\end{aligned}$$

die bei Anwendung des *Gauß*schen Integralsatzes auf das zweite Integral in

$$\begin{aligned}\delta A &= -\iiint\limits_R E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_{\nu\lambda}\,\delta V_\mu\,d\tau + \iint\limits_F E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_\nu\,\delta V_\mu\,n_\lambda\,df \\ &= -\iiint\limits_R E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_{\nu\lambda}\,\delta V_\mu\,d\tau + \iint\limits_F t^\mu\,\delta V_\mu\,df\end{aligned}$$

übergeht, und mit der Identität

$$\begin{aligned}&- \iint\limits_{\frac{1}{G}} t^1\,\delta V_1\,df - \iint\limits_{\frac{2}{G}} t^2\,\delta V_2\,df - \iint\limits_{\frac{3}{G}} t^3\,\delta V_3\,df \\ &= -\iint\limits_F t^\mu\,\delta V_\mu\,df + \iint\limits_{\frac{1}{G}} t^1\,\delta V_1\,df + \iint\limits_{\frac{2}{G}} t^2\,\delta V_2\,df + \iint\limits_{\frac{3}{G}} t^3\,\delta V_3\,df\end{aligned}$$

folgt daraus die verschwindende erste Variation zu

$$\begin{aligned}\delta\Pi = 0 = &- \iiint\limits_R (E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_{\nu\lambda} + \bar{p}^\mu)\,\delta V_\mu\,d\tau + \\ &+ \iint\limits_{\frac{1}{G}} (t^1 - \bar{t}^1)\,\delta V_1\,df + \iint\limits_{\frac{2}{G}} (t^2 - \bar{t}^2)\,\delta V_2\,df + \iint\limits_{\frac{3}{G}} (t^3 - \bar{t}^3)\,\delta V_3\,df - \\ &- \iint\limits_{\frac{1}{G}} \delta t^1\,(V_1 - \bar{\bar{V}}_1)\,df - \iint\limits_{\frac{2}{G}} \delta t^2\,(V_2 - \bar{\bar{V}}_2)\,df - \iint\limits_{\frac{3}{G}} \delta t^3\,(V_3 - \bar{\bar{V}}_3)\,df\,.\end{aligned}$$

Ihr entnimmt man die Differentialgleichungen

$$E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_{\nu\lambda} + \bar{p}^\mu = 0$$

und die Randbedingungen

$$[t^\mu]_{\frac{\mu}{G}} = [E^{\lambda\mu\nu\varrho}\,V_\varrho|_\nu\,n_\lambda]_{\frac{\mu}{G}} = \bar{t}^\mu\,; \qquad (\mu = 1, 2, 3)\,,$$

$$[V_\mu]_{\frac{\mu}{G}} = \bar{\bar{V}}_\mu\,; \qquad (\mu = 1, 2, 3)\,,$$

ohne daß an die variierten Größen Forderungen zu stellen sind.

5. Hamiltonsches Prinzip. Bezeichnen ϱ die Dichte des Materials und t die Zeit, so gilt bekanntlich für die kinetische Energie des elastischen Körpers

$$T = \frac{1}{2} \iiint\limits_R \varrho\,\frac{\partial V^\mu}{\partial t}\,\frac{\partial V_\mu}{\partial t}\,d\tau\,.$$

Mit dieser lautet das *Hamilton*sche Prinzip in der Kinetik elastischer Körper[1]

$$I = \int_1^2 (T - U)\, dt = \text{Extrem.} \qquad [\delta V_\mu]_1 = 0\,, \qquad [\delta V_\mu]_2 = 0\,,$$

$$[\delta V_1]_{\overline{\overline{G}}}^{1} = 0\,, \qquad [\delta V_2]_{\overline{\overline{G}}}^{2} = 0\,, \qquad [\delta V_3]_{\overline{\overline{G}}}^{3} = 0\,.$$

Unter Verwendung der potentiellen Energie $\Pi(V_1, V_2, V_3, t^1, \bar{t}^2, \bar{t}^3, \bar{\bar{V}}_1, \bar{\bar{V}}_2, \bar{\bar{V}}_3)$ kann das *Hamilton*sche Prinzip in der modifizierten Form

$$S = \int_1^2 (T - \Pi)\, dt = \text{Extrem.} \qquad [\delta V_\mu]_1 = 0\,, \qquad [\delta V_\mu]_2 = 0$$

geschrieben werden. Dabei sind auch hier die Bedingungen für die variierten Verschiebungen

$$[\delta V_\mu]_{\overline{\overline{G}}}^{\mu} = 0\,; \qquad (\mu = 1, 2, 3)$$

entfallen, und das Variationsprinzip hat die gleiche Form wie in der Kinetik der Massenpunktsysteme. Wegen $\Pi \equiv U + Z = -\left(\overset{*}{U} + \overset{*}{Z}\right)$ erhält man die beiden Formulierungen

$$S = \int_1^2 (T - U - Z)\, dt = \text{Extrem.} \qquad [\delta V_\mu]_1 = 0\,, \qquad [\delta V_\mu]_2 = 0\,,$$

bzw.

$$S = \int_1^2 \left(T + \overset{*}{U} + \overset{*}{Z}\right) dt = \text{Extrem.} \qquad [\delta V_\mu]_1 = 0\,, \qquad [\delta V_\mu]_2 = 0\,.$$

(Eingegangen am 26. Juli 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Freiberg (Sachsen), Straße der Einheit 12.

[1] Vgl. z. B. *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1 S. 85.

Ludwig Prandtl

Gesammelte Abhandlungen

zur angewandten Mechanik, Hydro- und Aerodynamik

Herausgegeben im Auftrage
der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt und der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik

von Walter Tollmien, Göttingen · Hermann Schlichting, Göttingen
Henry Görtler, Freiburg i. Br.

Schriftleitung: F. W. Riegels, Göttingen

In 3 Teilen mit einem Porträt und 1003 Abbildungen.
Teil I: XX, 574 Seiten; Teil II: XIV, 496 Seiten; Teil III: XIV, 550 Seiten Gr.-8°. 1961.
DM 273,—; Ganzleinen DM 288,—

ZUR INFORMATION

Die vorliegenden drei Teile enthalten das Lebenswerk von Ludwig Prandtl. Es sind darin 133 Originalveröffentlichungen Prandtls wieder abgedruckt worden. Diese sind in neun fachlich zusammengefaßten Kapiteln zeitlich geordnet und spiegeln damit im klaren Stil des großen Gelehrten die Entwicklung mehrerer wissenschaftlicher Fachdisziplinen in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts. Die einzelnen Kapitel behandeln die meist grundlegenden Beiträge Ludwig Prandtls zu folgenden Teilgebieten der Mechanik: Elastizität, Plastizität und Rheologie, Tragflügeltheorie, Grenzschichten, Theorie des Widerstandes, Turbulenz und Wirbelbildung, Gasdynamik, meteorologische Anwendungen der Strömungslehre und Modellversuchswesen. Das letztgenannte Kapitel enthält auch eingehende Angaben zur Geschichte der Göttinger Windkanäle.
Das Werk enthält verschiedene Übersichten: eine chronologische Liste der abgedruckten Veröffentlichungen, ein Verzeichnis der nicht wieder abgedruckten Veröffentlichungen, ein Verzeichnis der bei Ludwig Prandtl entstandenen Dissertationen und eine Zusammenstellung der biographischen Daten und der wissenschaftlichen Ehrungen Ludwig Prandtls.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Ingenieur-Mathematik

Von Dr. **Robert Sauer,**

Professor an der Technischen Hochschule München

Zweiter Band

Differentialgleichungen und Funktionentheorie

Mit 95 Abbildungen. XII, 180 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 18,—

INHALTSVERZEICHNIS

III. Kapitel: Vektoranalysis: Gradient, Divergenz und Rotation. Übergang zu Zylinder- und Kugelkoordinaten. Wirbelfreie und quellenfreie Vektorfelder · IV. Kapitel: Differentialgleichungen: Geometrische Deutung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und Existenzsatz. Graphische und numerische Integrationsverfahren für die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Elementar integrierbare Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Kurvenscharen, singuläre Integrale. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen. Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen *n*-ter- Ordnung. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Anwendung auf Schwingungsprobleme. Fourier-Reihen. Rand- und Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen · V. Kapitel: Funktionentheorie: Differentialquotient und Integral. Konforme Abbildung. Lineare Funktion. Logarithmus, Exponentialfunktion und Potenzfunktion. Kreis- und Hyperbelfunktionen. Anwendungen in Aerodynamik und Elektrotechnik. Cauchysche Integralformel. Darstellung analytischer Funktionen durch Potenzreihen. Singuläre Stellen. Residuensatz, Auswertung uneigentlicher Integrale im Komplexen. Ausblick auf weitere Begriffe und Sätze der Funktionentheorie. Polygonabbildung nach Schwarz und Christoffel. Potentialgleichung · Anhang · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag • Berlin / Göttingen / Heidelberg · Printed in Germany • V/12/6